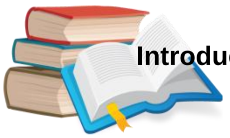
Ecuaciones
diferenciales

unab

Taller No. 9: Ecuaciones Lineales de Segundo Orden
El oscilador masa-resorte

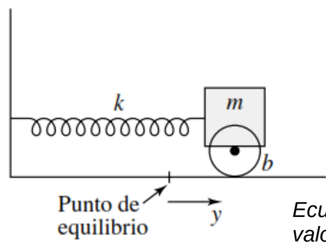
Objetivo

Reforzar los temas que fundamentan el conocimiento de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, en el caso específico del oscilador masa-resorte.



Introducción

Un oscilador masa-resorte está formado por una masa m unida a un resorte fijo en un extremo, como se muestra en la Figura 1. Diseñe una ecuación diferencial que gobierne el movimiento de este oscilador, tomando en cuenta las fuerzas que actúan sobre éste debido a la elasticidad del resorte, la fricción (amortiguamiento) y las posibles influencias externas.



Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera. Pearson Educación, 2009.

Figura 1. Oscilador masa-resorte amortiguado.

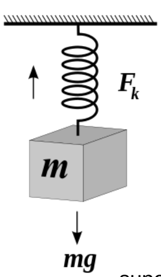
En esta guía y las siguientes consideraremos diversos sistemas lineales dinámicos, en los cuales cada modelo matemático es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes junto con condiciones iniciales especificadas en el tiempo t_0:

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=g(t), \qquad y(t_0)=y_0, \qquad y'(t_0)=y_1$$

Recuerde que g es la **función de entrada**, **impulsora** o **forzadora**, del sistema. La **salida** o **respuesta** del sistema es una función $y(t)$ definida en un intervalo I que contiene t_0 y satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales en el intervalo I.

Para efectos del mayor entendimiento del estudiante se dividen los temas en diferentes guías, por lo que en esta se analizarán el *Movimiento Libre no Amortiguado y* los temas de *Movimiento Libre Amortiguado y Forzado.*

Sistemas masa-resorte: Movimiento Libre no Amortiguado

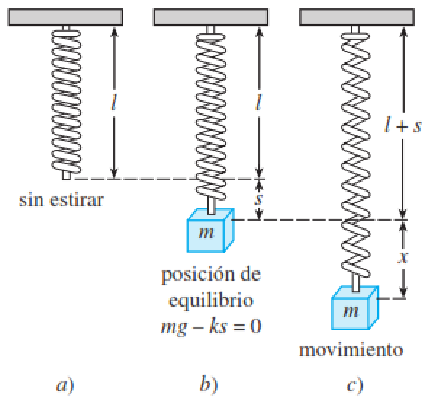


superamigosincreibles.wordpress.com

- **Ley de Hooke.** Suponga que un resorte flexible está suspendido verticalmente de un soporte rígido, y después una masa m se sujeta a su extremo libre. La cantidad de estiramiento o elongación del resorte dependerá, por supuesto, de la masa. Las masas con diferentes pesos estiran el resorte en diferentes cantidades. De acuerdo con la ley de Hooke, el propio resorte ejerce una fuerza de recuperación F que es contraria a la dirección de la elongación y proporcional a la cantidad de elongación s. Expresado de manera sencilla, $F = ks$, donde k es una constante de proporcionalidad llamada constante del resorte.

- **Segunda Ley de Newton** Después de que una masa m se anexa a un resorte y estira el resorte una cantidad s, el sistema alcanza una posición de equilibrio en la cual su peso W se balancea por la fuerza de recuperación ks. Recuerde que el peso está definido por $W = mg$, donde la masa se mide en slugs, kilogramos o gramos y $g = 32\ ft/s^2, 9.8\ m/s^2$ o $980\ cm/s^2$, respectivamente. Como indica la figura 2b), la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$. Si la masa se desplaza por una cantidad x desde su posición de equilibrio, la fuerza de recuperación del resorte es entonces $k(x+s)$. Si se supone que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre el sistema, y que la masa vibra libre de otras fuerzas externas —$\boldsymbol{movimiento\ libre}$— , podemos igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta, o resultante, de la fuerza restauradora y el peso:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg = -kx + \underbrace{\boldsymbol{mg - ks}}_{cero} = -kx. \qquad (1)$$



Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales. 2008.

Figura 2. Sistema masa-resorte.

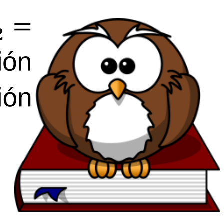
- **Ecuación Diferencial de Movimiento Libre no Amortiguado.** Al dividir (1) entre la masa m obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ o

$$\frac{d^2x}{dt^2} = w^2x = 0, \qquad (2)$$

Donde $w^2 = k/m$. Se dice que la ecuación (2) describe el **movimiento armónico simple** o **movimiento libre no amortiguado**. Dos condiciones iniciales evidentes asociadas con (2) son $x(0) = x_0$, la cantidad de desplazamiento inicial, y $x'(0) = x_1$, la velocidad inicial de la masa.

- **Solución y Ecuación de Movimiento.** Para resolver la ecuación (2), observemos que las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + w^2 = 0$ son los números complejos $m_1 = wi,\ m_2 = -wi$. Por lo tanto, a partir de la expresión $y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$ encontramos que la solución general de (2) es

$$x(t) = c_1\cos wt + c_2\sin wt, \qquad (3)$$



El **periodo** de vibraciones libres descrito por (3) es $T = 2\pi/w$, y la **frecuencia** es $f = 1/T = w/2\pi$.

Ejemplo 1

Una masa que pesa 2 libras estira un resorte 6 pulgadas. En $t = 0$, la masa se libera de un punto situado 8 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ pies/s. Determinar la ecuación de movimiento libre.

Debido a que estamos usando el sistema de unidades para ingeniería, las mediciones dadas en términos de pulgadas se deben convertir a pies: $6\ in = \frac{1}{2} ft; 8\ in = \frac{2}{3} ft$. Además, debemos convertir las unidades de peso dadas en libras en unidades de masa. De $m = W/g$ tenemos $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}\ slug$. También, con base en la ley de Hooke, $2 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que la constante del resorte es $k = 4\ lb/ft$. Por lo tanto, (1) da:

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \qquad o \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = \frac{2}{3}, x'(0) = -\frac{4}{3}$, donde el signo negativo presente en la última condición es consecuencia de que la masa está dada con velocidad inicial en dirección negativa, o ascendente.

Ahora, $w^2 = 64$ o $w = 8$, de manera que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t. \qquad (4)$$

Al aplicar las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se tiene $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. De esta forma, la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\sin 8t. \qquad (5)$$

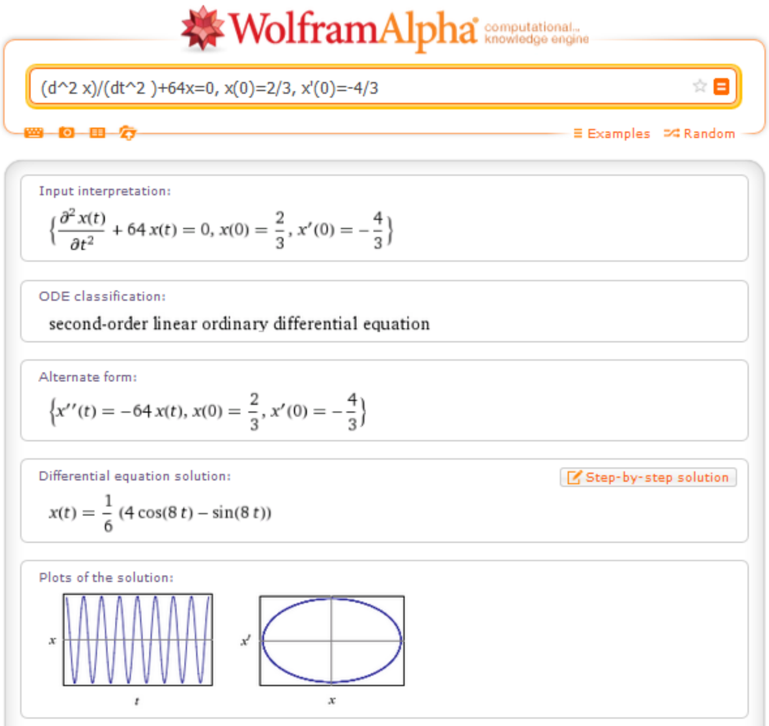
Observación: *Es importante recalcar que existen otras formas de presentar y hallar la solución del ejercicio anterior, sin embargo, aquí se presenta la solución más general. Además, en el modelo que se analizó líneas arriba asumimos un caso ideal, una situación donde las características físicas del resorte no cambian en el tiempo. Para estar más acorde con el mundo real se utilizaría un modelo para la* ***degradación de rigidez****, donde la constante k presentada en (1) se reemplaza por una función menguante $K(t) = ke^{-\alpha t}$, $k > 0, \alpha > 0$.*

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y oprimimos la tecla “Enter”.

Primero revisamos el recuadro de interpretación de las entradas de Wolfram y revisamos que las condiciones iniciales estén correctas, para ello podemos separarlas por “,” comas o “;” punto y coma. Luego revisamos la clasificación de la ecuación diferencial y podemos ver que es una ecuación de segundo orden lineal, que es el tema que estamos trabajando, “Modelos Lineales de

Orden Superior". Posteriormente, vemos la forma alternativa donde se utiliza una notación diferente para representar la ecuación y luego nos encontramos el recuadro de la respuesta la cual coincide con la respuesta obtenida, la única diferencia es que Wolfram factoriza (1/6) de la ecuación, más adelante vemos las gráficas tanto de la función que sigue una forma cosenoidal, como de la derivada que se ve representada por una elipse.



Ejercicios propuestos

Utilice el método que se analizó en la sección para resolver:

1. Una masa que pesa 24 libras se sujeta al extremo de un resorte y se estira 4 pulgadas. En un inicio, la masa se libera del reposo desde un punto situado 3 pulgadas por encima de la posición de equilibrio. Encuentre la ecuación del movimiento.
2. Determine la ecuación del movimiento si la masa del problema anterior se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial descendente de $2\ ft/s$.
3. Una fuerza de 400 newtons estira un resorte de 2 metros. Una masa de 50 kilogramos se sujeta al extremo del resorte e inicialmente se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 10 m/s. Encuentre la ecuación del movimiento.
4. Una masa que pesa 32 libras estira un resorte de 2 pies. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si la masa inicialmente es liberada desde un punto situado 1 pie por encima de la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 2 ft/s. ¿Cuántos ciclos completos habrá cubierto la masa al final de 4π segundos?

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=JWyyFs7tMfk

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**