Ecuaciones

diferenciales

unab

Taller No. 8: Ecuaciones lineales homogéneas
La solución general

Objetivo

Reforzar los conocimientos del estudiante en los temas de fundamentación y conceptos para el entendimiento de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales homogéneas y la aplicación de la solución general para estas.

Introducción

Comenzamos nuestro estudio de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (a \neq 0), \qquad (1)$$

En el caso particular en que la función $f(t)$ es cero:

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}, \qquad (\mathbf{2})$$

Este caso surge al considerar osciladores masa-resorte con vibración libre, es decir, sin aplicar fuerzas externas. La ecuación (2) se llama la *forma homogénea* de la ecuación (1); $f(t)$ es la "no homogeneidad" en (1). (Esta nomenclatura no se relaciona con la forma en que usamos el término para las ecuaciones de primer orden en los temas de sustituciones y transformaciones.)

Al observar la ecuación (2) vemos que sus soluciones deben tener la propiedad de que su segunda derivada pueda expresarse como combinación lineal de sus derivadas de orden uno y cero. Esto sugiere tratar de hallar una solución de la forma $y = e^{rt}$, ya que las derivadas de e^{rt} son precisamente constantes por e^{rt}. Si sustituimos $y = e^{rt}$ en (2), obtenemos:
$ar^2e^{rt} + re^{rt} + ce^{rt} = 0,$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0,$$

Como e^{rt} nunca es cero, podemos dividir entre esto para obtener:

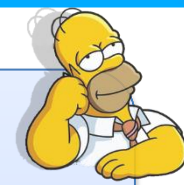
$$\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0} \quad . \quad (\mathbf{3})$$

En consecuencia, $y = e^{rt}$ es una solución de (2) si y sólo si r satisface la ecuación (3). La ecuación (3) es la **ecuación auxiliar** (o **ecuación característica**) asociada a la ecuación homogénea (2).

La ecuación auxiliar es cuadrática y sus raíces son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales. Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son números complejos conjugados. En esta guía consideraremos los dos primeros casos y pospondremos el caso complejo para una posterior guía.



Ejemplo 1

Resolver el problema con valores iniciales

$$y'' + 2y' - y = 0;\ y(0) = 0\,, y'(0) = -1. \qquad (4)$$

Ajustamos las constantes $c_1 c_2$ en $(\,y(t) = c_1\,y_1(t) + c_2 y_2(t)\,)$ para obtener una solución que cumpla las condiciones iniciales sobre $y(0)$ y $y'(0)$. La ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 2r - 1 = 0$$

La fórmula cuadrática indica que las raíces de esta ecuación son:

$$r_1 = -1 + \sqrt{2} \qquad y \qquad r_2 = -1 - \sqrt{2}\,.$$

En consecuencia, la ecuación diferencial dada tiene soluciones de la forma:

$$y(t) = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}, \qquad (5)$$

Para determinar la solución específica que satisface las condiciones iniciales dadas en (4), primero derivamos la y dada en (5) y luego sustituimos y y y' en las condiciones iniciales de (4), obteniendo

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0\ ,$$
$$y'(0) = (-1 + \sqrt{2})\,c_1 e^0 + (-1 - \sqrt{2})\,c_2 e^0$$

O

$$0 = c_1 + c_2\ ,$$
$$-1 = \left(-1 + \sqrt{2}\right) c_1 + \left(-1 - \sqrt{2}\right) c_2\,.$$

Al resolver este sistema de se tiene que $c_1 = -\sqrt{2}/4$ y $c_2 = \sqrt{2}/4$. Así,

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{(-1+\sqrt{2})t} + \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{(-1-\sqrt{2})t}$$

Es la solución deseada.

Ejemplo 2

Determinar la solución general de:

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0, \ (6)$$

Si tratamos de hallar soluciones de la forma $y = e^{rt}$, entonces, como con las ecuaciones de segundo orden, debemos hallar las raíces de la ecuación auxiliar:

$$r^3 + 3r^2 - r - 3 = 0, \quad (7)$$

Observemos que $r = 1$ es una raíz de la ecuación anterior; al dividir el polinomio del lado izquierdo de (7) entre $r - 1$ obtenemos la factorización:

$$(r-1)(r^2 + 4r + 3) = (r-1)(r+1)(r+3) = 0$$

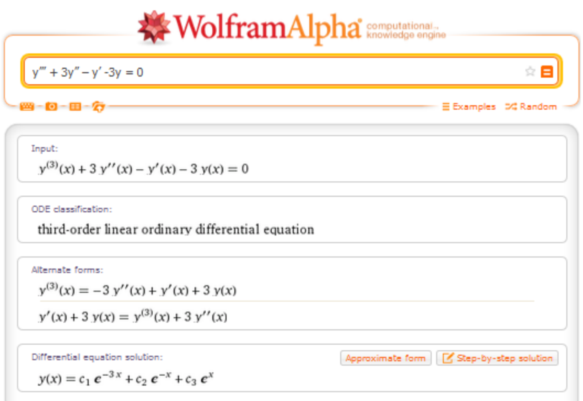
Por tanto, las raíces de la ecuación auxiliar son $1, -1$ y -3, de modo que las tres soluciones de (6) son e^t, e^{-t} y e^{-3t}. Así, una solución general de (6) es:

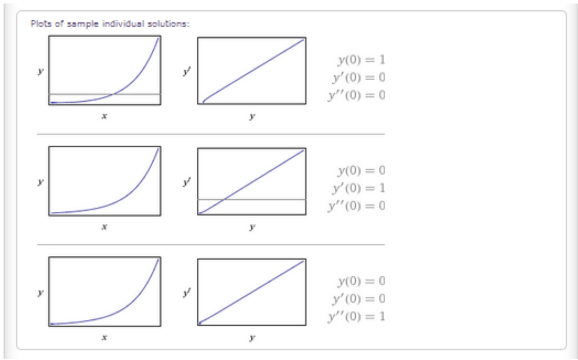
$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}$$

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 2 y oprimimos la tecla “Enter”.

Primero es de notar que las respuestas coinciden, la del ejemplo desarrollado y la arrojada por Wolfram, una característica importante de la imagen a continuación es que en la parte derecha vemos, tres diferentes gráficas que como se explica en la solución final del ejemplo vienen dadas por las 3 soluciones que tiene este problema en particular, por lo que vemos la misma forma de la ecuación, sin embargo esta cambia en cada una de ellas en t lo que provoca un desplazamiento de la función, posteriormente y aunque en la imagen no se muestra es la muy común gráfica donde se evidencian los cambios con respecto a las constantes.





Ejercicios Propuestos

Halle una solución general de la ED dada:

1. $4w'' + 20w' + 25w = 0$
2. $3y'' + 11y' - 7 = 0$

Resuelva el problema con valores iniciales:

3. $y'' - 4y' + 4y = 0;\ \ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$
4. $y'' - 4y' - 5y = 0;\ \ y(-1) = 3,\ y'(-1) = 9$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo: http://www.youtube.com/watch?v=MQwta7M4_UM

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**