Ecuaciones
diferenciales

unab

Taller No. 7: Sustituciones y transformaciones
Ecuaciones con coeficientes lineales

Objetivo

Aplicar los procedimientos de sustitución en las ecuaciones diferenciales y distinguir una ecuación de coeficientes lineales para aplicar el método de resolución adecuado.

Introducción

En esta guía estudiamos uno de los cuatro tipos de ecuaciones que pueden transformarse en una ecuación separable o lineal por medio de una sustitución o transformación adecuada. No olvidemos el procedimiento de sustitución que aplica para todos los casos.

Procedimiento de sustitución

(a) Identifique el tipo de ecuación y determine la sustitución o transformación adecuada.
(b) Escriba la ecuación original en términos de las nuevas variables.
(c) Resuelva la ecuación transformada.
(d) Exprese la solución en términos de las variables originales.

Ecuaciones con coeficientes lineales

Hemos utilizado varias sustituciones de y para transformar la ecuación original en una nueva ecuación que se puede resolver. En algunos casos, debemos transformar x y y en nuevas variables, digamos u y v. Éste es el caso para las **ecuaciones con coeficientes lineales**, es decir, ecuaciones de la forma:

$$\boldsymbol{(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0}, \qquad \mathbf{(1)}$$

Donde las $a_i's, b_i's\ y\ c_i's$ son constantes. Dejaremos como ejercicio a demostrar que si $a_1b_2=a_2b_1$, la ecuación (1) se puede escribir en la forma $dy/dx=G(ax+by)$, que resolvimos mediante la sustitución $z=ax+by$.

Antes de considerar el caso general en que $a_1b_2\neq a_2b_1$, analicemos primero la situación particular en que $c_1=c_2=0$. La ecuación (1) se convierte entonces en:

$$(a_1x+b_1y)dx+(a_2x+b_2y)dy=0,$$

Que puede escribirse en la forma:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=-\frac{a_1+b_1(y/x)}{a_2+b_2(y/x)}$$

Esta ecuación es homogénea, de modo que podemos resolverla mediante el método que analizamos en la guía No.5.

El análisis anterior sugiere el siguiente procedimiento para resolver (1). Si $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, entonces buscamos una translación de ejes de la forma:

$$\boldsymbol{x = u + h \quad y \quad y = v + k} \;,$$

Donde h y k son constantes, que cambie $a_1 x + b_1 y + c_1$ por $a_1 u + b_1 v$ y $a_2 x + b_2 y + c_2$ por $a_2 u + b_2 v$. Algo de algebra elemental muestra que tal transformación existe si el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{a_1 h + b_1 k + c_1 = 0} \qquad ,$$
$$\boldsymbol{a_2 h + b_2 k + c_2 = 0} \quad (\mathbf{2})$$

Tiene una solución. Esto queda garantizado por la hipótesis $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, que geométricamente es equivalente a suponer dos rectas descritas por el sistema (2) se intersectan. Si (h, k) satisface (2), entonces las sustituciones $x = u + h$ y $y = v + k$ transforma la ecuación (1) en la ecuación homogénea:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} = -\frac{a_1 + b_1 (v/u)}{a_2 + b_2 (v/u)}$$

¡Que sabemos cómo resolver!.

Ejemplo 1

Resolver

$$(-3x + y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0 \;(3)$$

Como $a_1 b_2 = (-3)(1) \neq (1)(1) = a_2 b_1$, usaremos la traslación de ejes $x = u + h$ y $y = v + k$, donde h y k satisfacen el sistema:

$$\boldsymbol{-3h + k + 6 = 0},$$
$$\boldsymbol{h + k + 2 = 0} \;,$$

Al resolver el sistema anterior en términos de h y k tenemos que $h = 1$,$k = -3$. Por tanto, hacemos que $x = u + 1$ y $y = v - 3$. Como $dy = dv$ y $dx = du$, al sustituir estas expresiones de x y y en la ecuación (3) se tiene:

$$(-3u + v)du + (u + v)dv = 0$$

O

$$\frac{dv}{du} = \frac{3 - \left(\frac{v}{u}\right)}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)}$$

La ecuación anterior es homogénea, de modo que hacemos $z = v/u$. Entonces $dv/du = z + u(dz/du)$ y al sustituir v/u, obtenemos

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{3 - z}{1 + z}$$

Al separar variables tenemos:

$$\int \frac{z + 1}{z^2 + 2z - 3} dz = -\int \frac{1}{u} du \;,$$
$$\frac{1}{2} \ln |z^2 + 2z - 3| = -ln|u| + C_1 \;,$$

Lo que se sigue:

$$z^2 + 2z - 3 = Cu^{-2} \quad ,$$

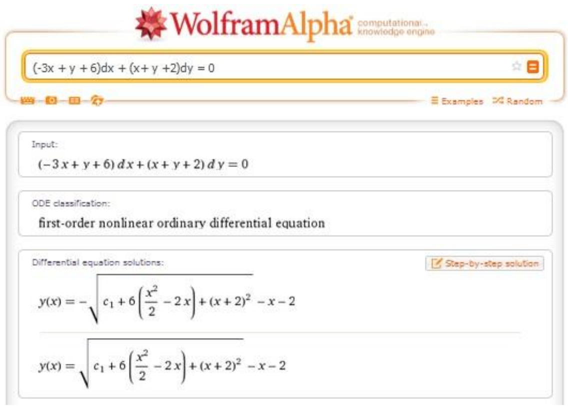
Al sustituir de nuevo en z, u y v, vemos que:

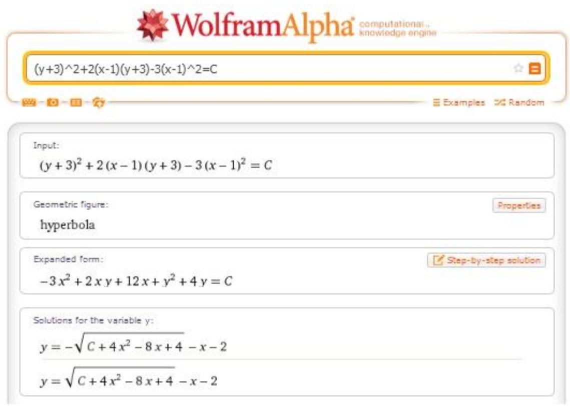
$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 2\left(\frac{v}{u}\right) - 3 = Cu^{-2}$$
$$v^2 + 2uv - 3u^2 = C$$
$$(y+3)^2 + 2(x-1)(y+3) - 3(x-1)^2 = C$$

Esta última ecuación proporciona una solución implícita de (3).

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada el ejemplo 1 y oprimimos la tecla "Enter".





En este caso la solución es presentada en el cuadro izquierdo y vemos que wólfram arroja el resultado con y despejado, entonces, para comprobar la veracidad de la respuesta, tomamos la solución analítica obtenida anteriormente y la introducimos en Wolfram para que nos despeje la y, una vez despejada, podemos reemplazar los mismos valores tanto para C como para x en ambas ecuaciones y nos damos cuenta que es la misma ecuación. Sin embargo, en el cuadro derecho la ecuación ya ha sido factorizada, por lo tanto verificamos la solución. En algunas ocasiones los resultados no se presentan de la misma forma en la que tenemos nuestro resultado debido a como Wolfram realiza las operaciones necesarias para resolver la ED, que generalmente, en esos casos, utiliza métodos numéricos para hallar una solución, por lo cual las respuestas no se presentan de la misma forma y es necesario este tipo de validación.

Ejercicios propuestos

Del siguiente listado de ecuaciones, identifique las ecuaciones de coeficientes lineales:

1. $(y-4x-1)^2dx-dy=0$
2. $(t+x+2)dx+(3t-x-6)dt=0$
3. $dy/dx+y/x=x^3y^2$
4. $(x-y)dx+(6x+12y-9)dy=0$

Utilice el método de ecuaciones con coeficientes lineales que se analizó en la guía para resolver:

1. $(-3x+y-1)dx+(x+y+3)dy=0$
2. $(x+y-1)dx+(y-x-5)dy=0$
3. $(2x-y)dx+(4x+y-3)dy=0$
4. $(2x+y+4)dx+(x-2y-2)dy=0$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha
.
Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=NGjiphgUqoY

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**