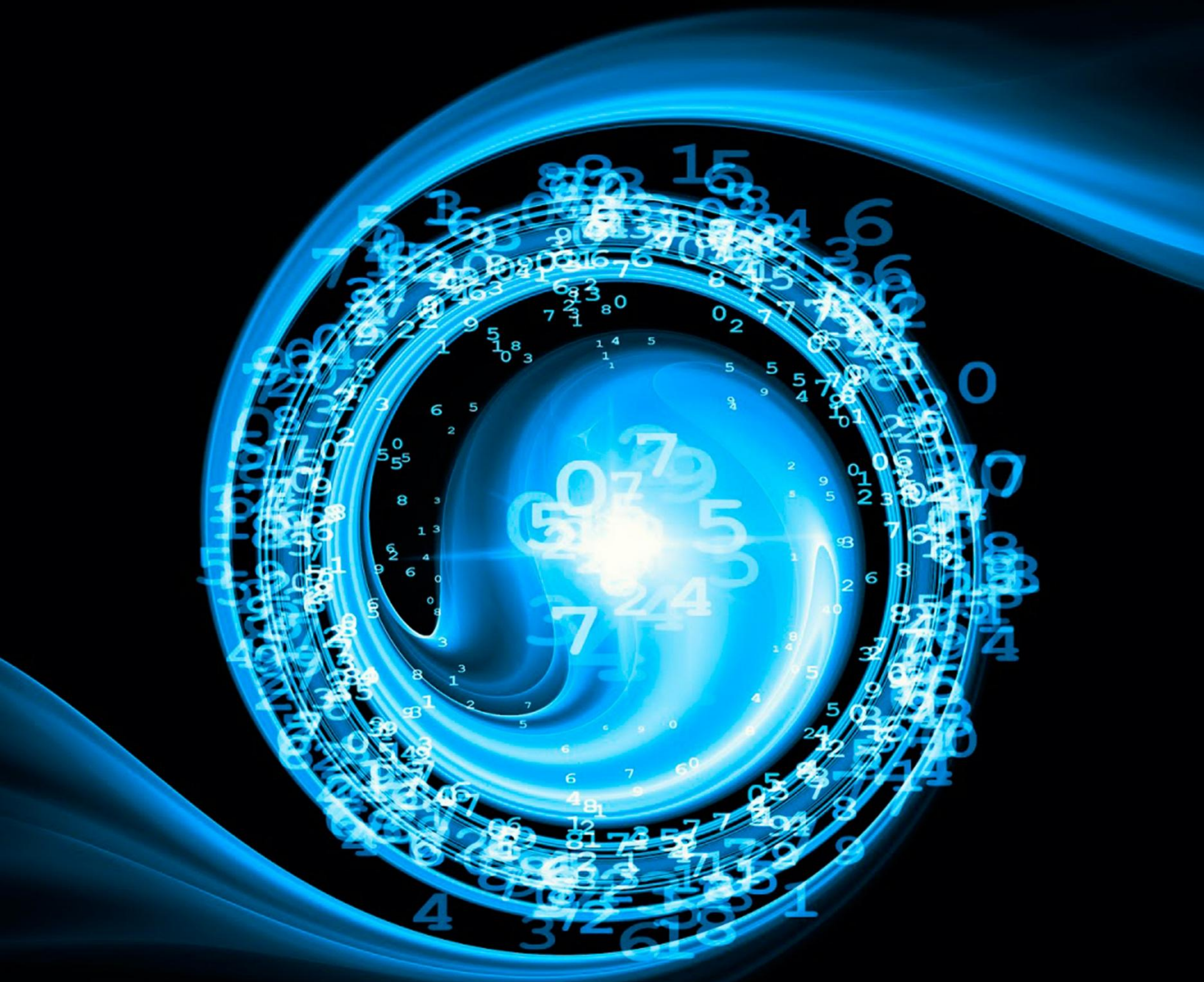
Ecuaciones
diferenciales



unab

Taller No. 6: Sustituciones y transformaciones
Ecuaciones de la forma $dy/dx = G(ax + by)$ y
Ecuación de Bernoulli

Objetivo

Aplicar los procedimientos de sustitución en las ecuaciones diferenciales y distinguir una ecuación tanto de la forma $dy/dx = G(ax + by)$ como de Bernoulli para aplicar el método de resolución adecuado.

Introducción

En esta guía estudiaremos dos de cuatro tipos de ecuaciones que pueden transformarse en una ecuación separable o lineal por medio de una sustitución o transformación adecuada. No olvidemos el procedimiento de sustitución que aplica para todos los casos.

Procedimiento de sustitución

(a) Identifique el tipo de ecuación y determine la sustitución o transformación adecuada.
(b) Escriba la ecuación original en términos de las nuevas variables.
(c) Resuelva la ecuación transformada.
(d) Exprese la solución en términos de las variables originales.

Ecuaciones de la forma $dy/dx = G(ax + by)$

Cuando el lado derecho de la ecuación $dy/dx = f(x,y)$ se puede expresar como una función de la combinación $ax + by$, donde a y b son constantes, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = G(ax + by) \,,$$

Entonces la sustitución

$$\boldsymbol{z = ax + by}$$

Transforma la ecuación en una ecuación separable. El método se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1} \quad , \quad (1)$$

El lado derecho se puede expresar como una función de $x - y$, es decir,

$$y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1} = -(x - y) - 1 + [(x - y) + 2]^{-1} \,,$$

Así que hacemos $z = x - y$, para hallar dy/dx, derivamos $z = x - y$ con respecto de x para obtener $dz/dx = 1 - dy/dx$, de modo que $dy/dx = 1 - dz/dx$. Al sustituir esto en (1) se tiene

$$1 - \frac{dz}{dx} = -z - 1 + (z + 2)^{-1} \quad ,$$

O

$$\frac{dz}{dx} = (z + 2) - (z + 2)^{-1}$$

Al resolver esta ecuación separable, obtenemos:

$$\int \frac{z+2}{(z+2)^2 \ -1} dz = \ \int dx \ ,$$

$$\frac{1}{2} ln|(z+2)^2 - 1| = x + C \ \ ,$$

De lo que sigue

$(z+2)^2 = \ Ce^{2x} + 1$

Por último, reemplazar z por $x - y$ se tiene:

$$(x - y + 2)^2 = \ Ce^{2x} + 1$$

Como solución implícita de la ecuación (1)

Ecuaciones de Bernoulli

Una ecuación de primer orden que puede escribirse de la forma

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n} \ , \qquad (\mathbf{2})$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo (a, b) y n es un número real, es una **ecuación de Bernoulli**

Observe que cuando $n = 0$ o1, la ecuación (2) es una ecuación lineal y se puede resolver mediante el método analizado en la guía No.3 de ecuaciones lineales, para otros valores de n la sustitución

$$\boldsymbol{v = y^{1-n}}$$

Transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal, como ahora mostraremos.

Al dividir la ecuación (2) entre y^n se tiene:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \, . \quad (3)$$

Al hacer $v = y^{1-n}$ y usar la regla de la cadena, vemos que:

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \ ,$$

De modo que la ecuación (3) se convierte en:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x) \ .$$

Como $1/(1-n)$ es solo una constante, la última ecuación realmente es lineal.

Ejemplo 2

Resolver

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3, \quad (4)$$

Esta es una ecuación de Bernoulli con $n = 3, P(x) = -5$ y $Q(x) = -5x/2$. Para transformar (4) en una ecuación lineal, primero dividimos entre y^3 para obtener:

$$y^3 \frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x$$

A continuación hacemos la sustitución $v = y^{-2}$. Como $dv/dx = -2y^{-3}dy/dx$, la ecuación transformada es:

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x$$
$$\frac{dv}{dx} + 10v = 5x. \quad (5)$$

La ecuación (5) es lineal, de modo que podemos resolverla en términos de v usando el método analizado en la guía No.3 de ecuaciones lineales. Al hacer esto, vemos que:

$$v = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

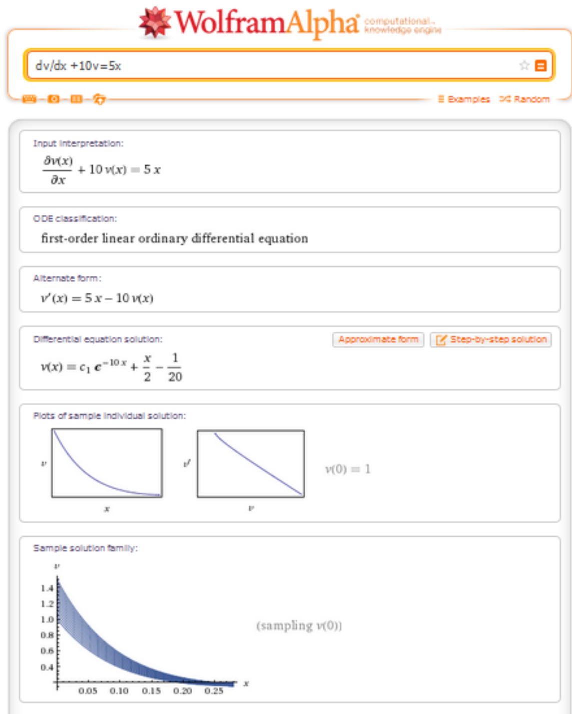
Al sustituir $v = y^{-2}$ se tiene la solución:

$$y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

En la última ecuación no se incluye la solución $y \equiv 0$ perdida en el proceso de división de (4) entre y^3.

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación, aunque en este caso no podemos escribir la ecuación del ejemplo 2 debido a que nos arrojaría resultados erróneos, puesto que realizamos una sustitución anteriormente entonces introducimos la ecuación 5 donde tenemos una ecuación lineal y oprimimos la tecla “Enter”.



Vemos que las soluciones concuerdan y como ya es sabido tenemos dos pequeñas gráficas de la solución y su derivada para ver a grandes rasgos y también una gráfica ampliada de la función resultante a diferentes valores de la constante C. Procedemos a hacer lo mismo para el ejemplo teniendo en cuenta que realizamos una sustitución y debemos introducir a Wolfram cuando ya la ecuación puede ser resuelta, después de la sustitución.

Ejercicios propuestos

Identifique la ecuación como de Bernoulli, de la forma $dy/dx = G(ax + by)$ o ninguna de las dos:

1. $(y - 4x - 1)^2 dx - dy = 0$
2. $(t + x + 2)dx + (3t - x - 6)dt = 0$
3. $dy/dx + y/x = x^3y^2$
4. $(ye^{-2x} + y^3)dx - e^{-2x}dy = 0$

Utilice el método de ecuaciones de la forma $dy/dx = G(ax + by)$ que se analizó en la sección para resolver:

5. $\frac{dy}{dx} = (x + y + 2)^2$
6. $\frac{dy}{dx} = \sin(x - y)$

Utilice el método de ecuaciones de Bernoulli que se analizó en la sección para resolver:

7. $\frac{dx}{dt} + tx^3 + \frac{x}{t} = 0$
8. $\frac{dx}{dt} + y^3x + y = 0$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver los siguientes videos a modo de ejemplo:

http://www.youtube.com/watch?v=GkojLryOWzY
http://www.youtube.com/watch?v=66TvmkZ5mAQ

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**