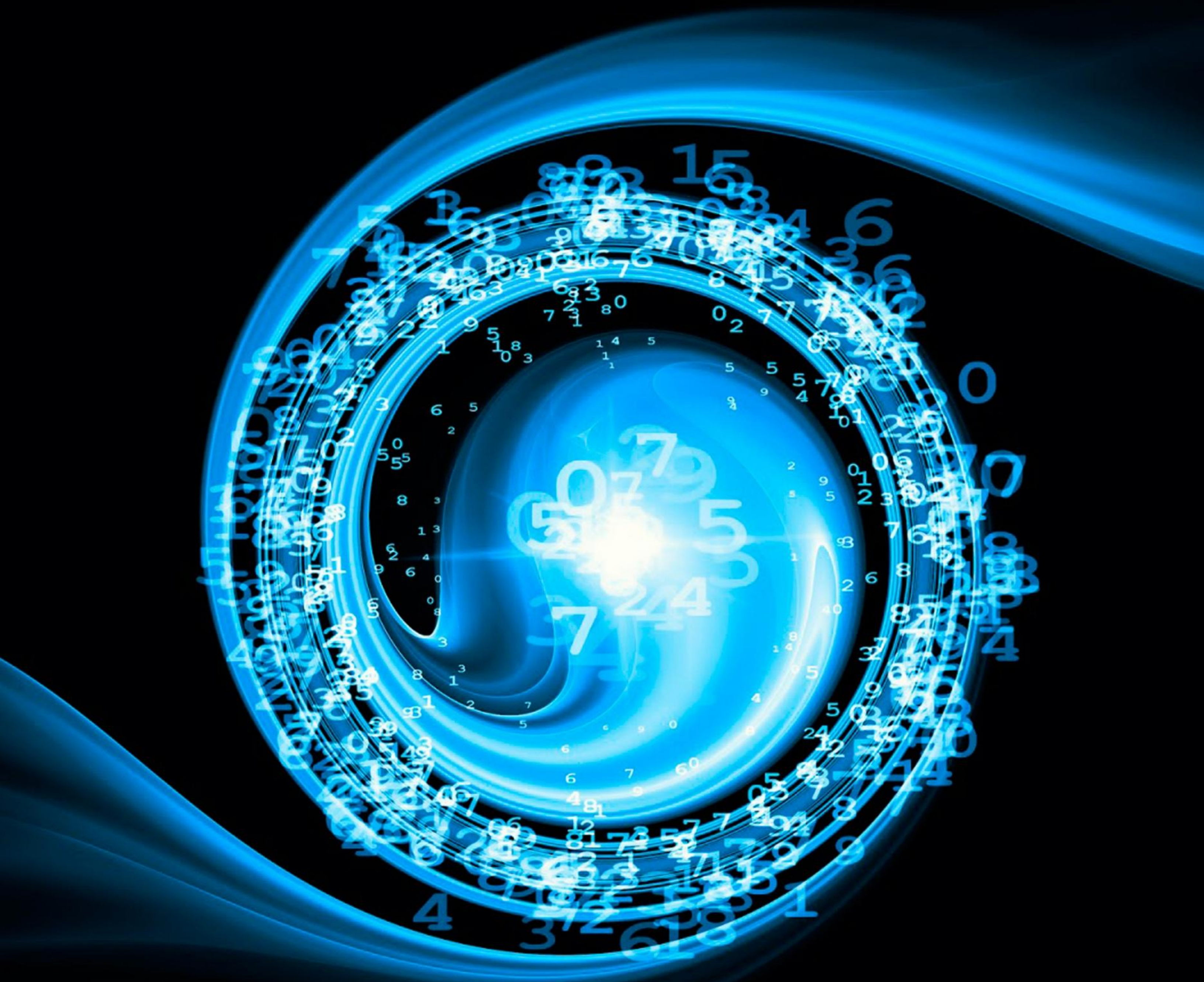
Ecuaciones

diferenciales



unab

Taller No. 5: Sustituciones y transformaciones
Ecuaciones homogéneas

Objetivo

Aplicar los procedimientos de sustitución en las ecuaciones diferenciales, diferenciar una ecuación homogénea para aplicar el método de resolución adecuado.

Introducción

Cuando la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

No es separable, exacta ni lineal, podríamos transformarla en una ecuación que sepamos resolver. Ese, de hecho, fue nuestro enfoque en el Taller No.3, donde utilizamos un factor integrante para transformar nuestra ecuación original en una ecuación lineal con una solución más simple.
En esta guía estudiamos uno de cuatro tipos de ecuaciones que pueden transformarse en una ecuación separable o lineal por medio de una sustitución o transformación adecuada.

Procedimiento de Sustitución

- **(a)** Identifique el tipo de ecuación y determine la sustitución o transformación adecuada.
- **(b)** Escriba la ecuación original en términos de las nuevas variables.
- **(c)** Resuelva la ecuación transformada.
- **(d)** Exprese la solución en términos de las variables originales.

Ecuaciones Homogéneas

Si el lado derecho de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

Se puede expresar como una función que solo depende del cociente y/x, entonces decimos que la ecuación es **Homogénea.**

Por ejemplo, la ecuación

$$(x-y)dx + xdy = 0 \qquad (2)$$

Se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1$$

Ya que hemos expresado $(y-x)/x$ como una función del cociente y/x; $[es\ decir, (y-x)/x = G(y/x), donde\ G(v) := v - 1]$, entonces la ecuación (2) es homogénea.
La ecuación

$$(x - 2y + 1)dx + (x - y)dy = 0 \qquad (3)$$

Se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 1}{y - x} = \frac{1 - 2(y/x) + (1/x)}{(y/x) - 1}$$

Por lo tanto, el lado derecho no se puede expresar como una función que sólo dependa de y/x, debido al término $1/x$ en el numerador. Entonces, la ecuación (3) no es homogénea.
Un criterio para la homogeneidad de la ecuación (1) consiste en reemplazar x por tx y y por ty. Entonces (1) es homogénea si y sólo si

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \qquad para\ toda\ t \neq 0$$

Para resolver una ecuación homogénea, hacemos una sustitución más o menos evidente.
Sea

$$\boldsymbol{v = \frac{y}{x}}$$

Nuestra ecuación homogénea tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = G(v) \qquad (4)$$

Y solo debemos expresar dy/dx en términos de x y v. Como $v = y/x$, entonces $y = vx$. Recuerde que v y y son funciones de x, por lo que podemos usar la regla del producto para la derivada y deducir de $y = vx$ que

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Entonces sustituimos la expresión anterior para dy/dx en la ecuación (4) para obtener

$$v + x\frac{dv}{dx} = G(v). \qquad (5)$$

La nueva ecuación (5) es separable, y podemos obtener su solución implícita de

$$\int \frac{1}{G(v)-v} dv = \int \frac{1}{x} dx\ .$$

Solo hace falta expresar la solución en términos de las variables originales x y y.

Ejemplo1

Resolver

$$(xy + y^2 + x^2)dx - x^2 dy = 0 \quad . \qquad (6)$$

Una verificación mostrará que la ecuación (6) no es separable, exacta ni lineal. Si expresamos (6) en la forma de derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 \qquad (7)$$

Entonces vemos que el lado derecho de (7) es una función de sólo x/y. Así, la ecuación (6) es homogénea.

Ahora sea $v = y/x$ y recuerde que $dy/dx = v + x(dv/dx)$. Con estas sustituciones, la ecuación (7) se convierte en

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + v^2 + 1$$

La ecuación anterior es separable, al separar las variables e integrar obtenemos,

$$\int \frac{1}{v^2+1} dv = \int \frac{1}{x} dx\ ,$$

$$\tan^{-1} v = ln|x| + C$$

Por tanto,

$$v = \tan(ln|x| + C)$$

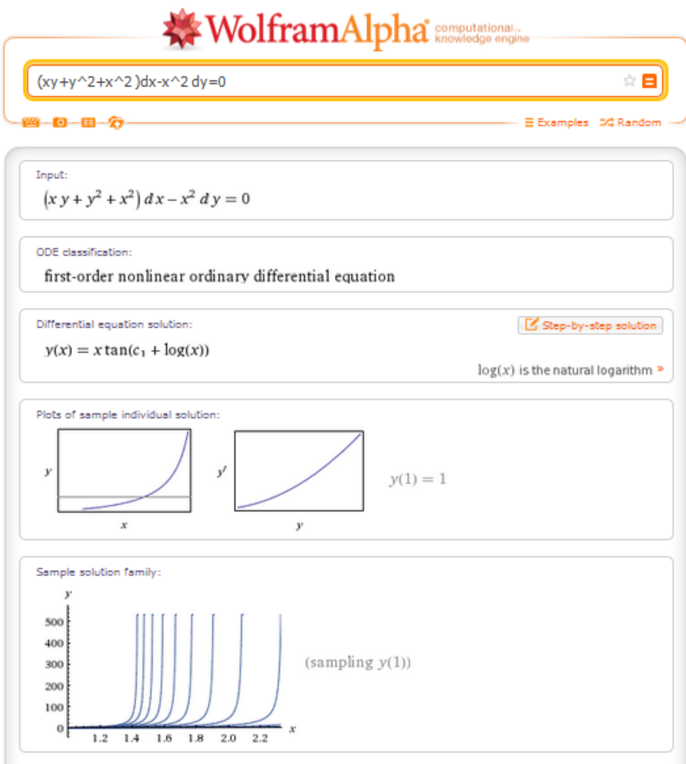
Por último, sustituimos y/x en vez de v y despejamos para obtener

$$y = x\tan(ln|x| + C)$$

Como solución explícita de la ecuación (6). Observe además que $x \equiv 0$ es una solución.

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y oprimimos la tecla “Enter”



Una vez aparecen los resultados, podemos observar el orden de la ecuación que es de primer orden no lineal, y la solución que contrastada con la desarrollada en el ejemplo, son la misma. Posteriormente aparecen dos pequeñas gráficas de la función y la derivada a manera general para ver el comportamiento de la función y luego una gráfica mucho más ampliada que nos muestra los diferentes valores de la función para distintos valores de C, en esta gráfica se hace notar la función tangente que rige la gráfica junto con el logaritmo.

Ejercicios Propuestos

Utilice el método que se analizó en la sección para resolver:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{3xy}$
2. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t\sqrt{t^2 + x^2}}{tx}$
3. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$
4. $(x^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo: http://www.youtube.com/watch?v=KjhJ3_idLM0

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**