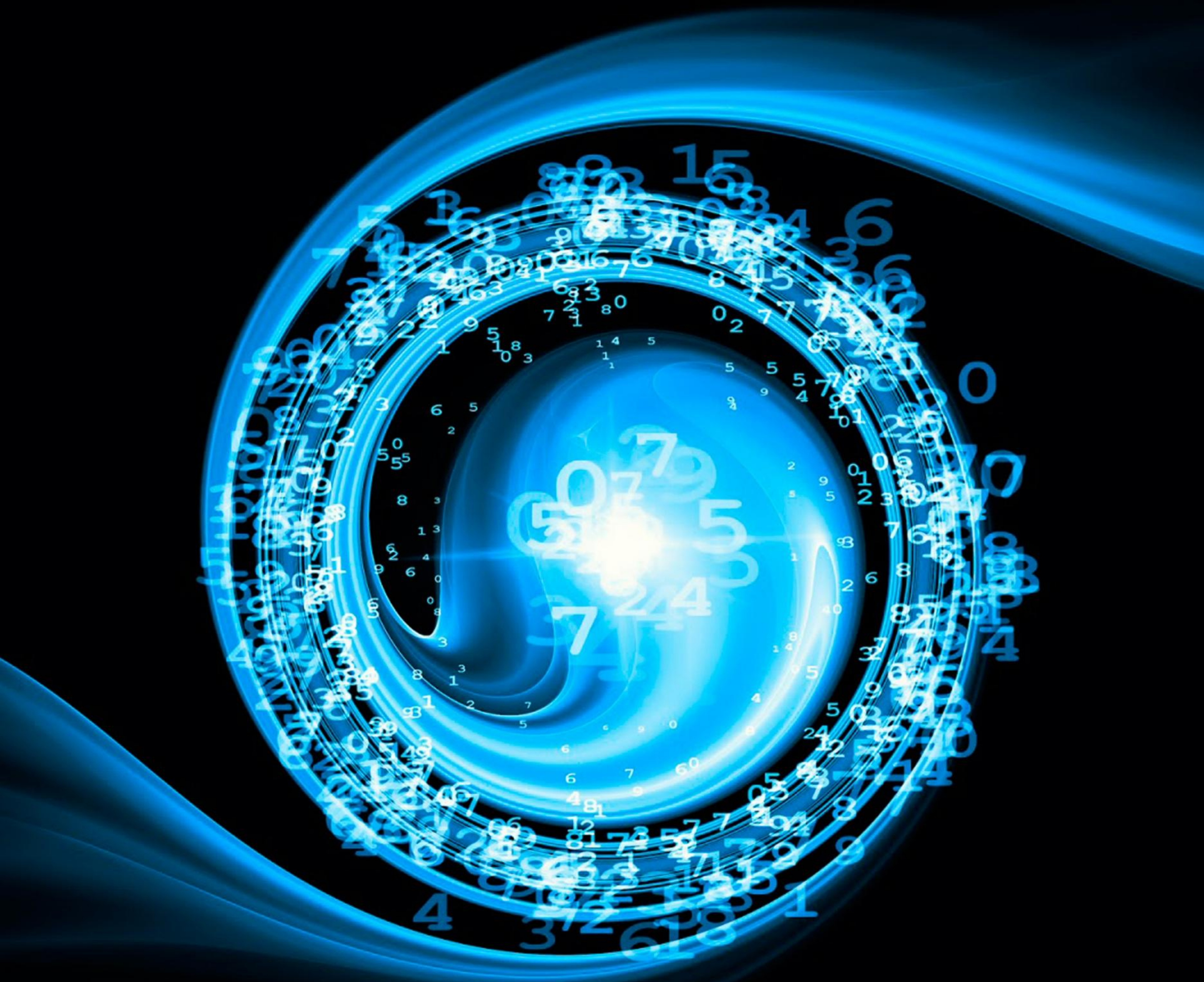
Ecuaciones diferenciales



unab

Taller No. 4: Ecuaciones exactas

Objetivo

Diferenciar una ecuación diferencial exacta aplicando los criterios y resolverla por los diferentes métodos de resolución.

Conceptualización

Aunque la ecuación diferencial simple $ydx + xdy = 0$ es separable, podemos resolverla de manera alternativa si reconocemos que el lado izquierdo es equivalente al diferencial del producto de x por y, es decir, $ydx + xdy = d(xy)$, al integrar ambos lados de la ecuación obtenemos de inmediato la solución implícita $xy = C$.

Diferencial de una función de dos variables

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región *R* del plano *xy*, entonces su diferencial (también llamado diferencial total) es:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (1)$$

Ahora si $f(x, y) = C$, a partir de (1) se deduce que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \qquad (2)$$

En otras palabras, dada una familia de curvas de un parámetro $f(x, y) = C$, podemos generar una ecuación diferencial de primer orden al calcular el diferencial. Por ejemplo, si $x^2 - 5xy + y^3 = C$, entonces (2) resulta en:

$$(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0. \qquad (3)$$

Para cumplir nuestros propósitos resulta más importante modificar el problema, es decir, dada una ED de primer orden como (3), ¿podemos reconocer que es equivalente al diferencial $d(\,x^2 - 5xy + y^3) = 0$?

Ecuación Exacta

Una expresión diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una **diferencial exacta** en una región *R* del plano *xy* si corresponde al diferencial de alguna función $f(x, y)$. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Es una **ecuación exacta** si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Criterio para una diferencial exacta

Digamos que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuos y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región *R* definida por $a < x < b, c < y < d$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea una diferencial exacta es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (4)$$

Método para resolver ecuaciones exactas

(a) Si $Mdx + Ndy = 0$ es exacta, entonces $\partial F/\partial x = M$. Integre esta última ecuación con respecto de x para obtener

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \qquad (5)$$

(b) Para determinar $g(y)$, calcule la derivada parcial con respecto de y de ambos lados de la ecuación (5) y sustituya N en vez de $\partial F/\partial y$. Ahora podemos hallar $g'(y)$.

(c) Integre $g'(y)$ para obtener $g(y)$ salvo una constante numérica. Al sustituir $g(x)$ en la ecuación (5) se obtiene $F(x, y)$.

(d) la solución de $Mdx + Ndy = 0$ está dada de manera implícita por

$$F(x, y) = C.$$

(En forma alternativa, partiendo de $\partial F/\partial y = N$, la solución implícita se puede determinar integrando primero con respecto de y). Ver ejemplo 2:

Ejemplo 1

Resolver

$$(2xy - sec^2 x)\, dx + (x^2 + 2y)dy \;=\; 0\,, \qquad (6)$$

En este caso $M(x, y) = 2xy - sec^2 x$ y $N(x, y) = x^2 + 2y$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

La ecuación (6) es exacta. Para determinar $F(x, y)$, comenzamos integrado M con respecto de x:

$$F(x, y) \;=\; \int (2xy \; - sec^2 x)\, dx \;+\; g(y), \qquad (7)$$

$$= x^2 y - \tan x + g(y)$$

A continuación consideramos la derivada parcial de (7) con respecto de y y sustituimos $x^2 + 2y$ en vez de N:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \;\;,$$

$$x^2 + g'(y) = \; x^2 + 2y \;.$$

Así, $g'(y) = 2y$, y como la elección de la constante de integración no es importante podemos considerar que $g(y) = \; y^2$. Por tanto, de (7), tenemos que $F(x, y), \; = x^2 y - \tan x + y^2$ y la solución de la ecuación (6) está dada de manera implícita por $x^2 y - \tan x + y^2 = C$.

Ejemplo 2

Resolver

$$(1 + e^x y + x e^x y)dx + (x e^x + 2)dy = 0 \ , \qquad (8)$$

En este caso $M = (1 + e^x y + x e^x y)$ y $N = (x e^x + 2)$. Como:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x + x e^x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

La ecuación (8) es exacta. Si ahora integramos $N(x, y)$ con respecto de y, obtenemos:

$$F(x, y) \ = \int (x e^x + 2)\, dy + h(x) = x e^x y + 2y + h(x)$$

Al considerar la derivada parcial con respecto de x y sustituir en $M,$ obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

$$e^x y + x e^x y + h'(x) = 1 + e^x y + x e^x y \ .$$

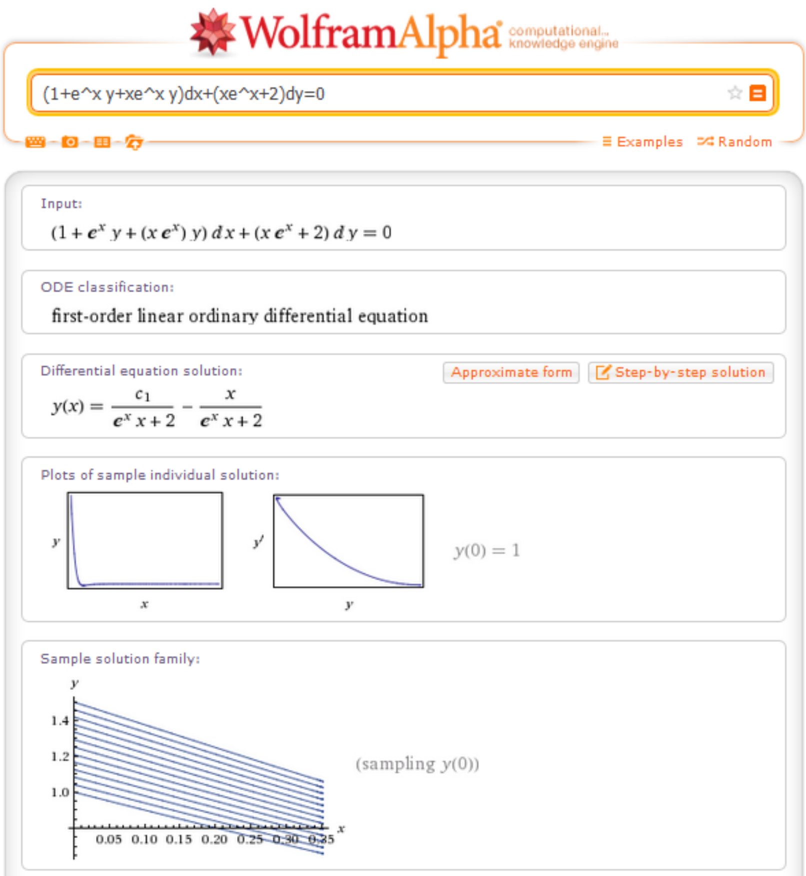
Así, $h'(x) = 1$, de modo que consideramos $h(x) = x$. En este caso, $F(x, y) \ = x e^x y + 2y + x$, la solución de la ecuación (8) está dada de manera implícita por $x e^x y + 2y + x = C$. En este caso podemos despejar y para obtener

$$y = \frac{C - x}{2 + x e^x}.$$

Observación: Como podemos utilizar cualquier procedimiento para hallar la función, puede valer la pena analizar cada una de las integrales $\int M(x, y)dx \ y \int N(x, y)dy$. Si una es más fácil de evaluar que la otra, esto sería razón suficiente para preferir un modelo sobre el otro.

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el link de la página de Wolfram Alpha o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada para este caso la ecuación del ejemplo 2 y oprimimos la tecla “Enter”



En este caso, si nos fijamos en el recuadro de la solución, vemos que tenemos la misma respuesta del ejercicio, simplemente que no se encuentra factorizada. De manera adicional podemos ver las diferentes curvas de las soluciones, esto debido a que por falta de condiciones iniciales no podemos despejar las constantes, por lo cual todavía no hay una unicidad en la solución, también tenemos las curvas de comportamiento de la función y su derivada para tener una idea de su comportamiento, y como es usual el software también nos muestra una gráfica un poco más ampliada con la función resultante a diferentes valores de la constante desconocida.

Ejercicios Propuestos

Determine si la ecuación es exacta, si lo es resuélvala:

1. $\left(\frac{t}{y}\right)dy+(1+\ln y)dt=0$
2. $\left(\frac{1}{y}\right)dx-\left(3y-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$

Resuelva el problema con valor inicial

3. $(e^t y+te^t y)dt+(te^t+2)dy\,,\qquad y(0)=-1.$
4. $(e^t x+1)dt+(e^t-1)dx\,,\qquad x(1)=1.$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=NUSe3qZzq54

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**