Ecuaciones

diferenciales

unab

Taller No. 3: Ecuaciones lineales

Objetivo

Reforzar los conocimientos del estudiante en los términos de linealidad de ecuaciones diferenciales y desarrollar ejercicios de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Conceptos Iniciales

Un tipo de ecuación diferencial de primer orden que aparece con mucha frecuencia en las diferentes aplicaciones es la ecuación lineal. Recuerde que una **ecuación lineal de primer orden** es una ecuación que se puede expresar de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)\,, \qquad (1)$$

Donde $a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ sólo dependen de la variable independiente *x,* no así de *y.*
Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 \operatorname{sen} x - (\cos x)y = (\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx}$$

Es lineal, pues puede escribirse de la forma

$$(\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = x^2 \operatorname{sen} x$$

Sin embargo, la ecuación

$$y\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)\,y^3 = e^x + 1$$

No es lineal, no puede escribirse en la forma de la ecuación (1) debido a la presencia de los términos y^3 y $\mathrm{y}\ \mathrm{dy}/dx$.

Debido a esto nos podemos dar cuenta que cuando el coeficiente $a_0(x)$ es igual a cero, la ecuación se reduce a

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} = b(x)\,, \qquad (2)$$

Que es equivalente a

$$y(x) = \int \frac{b(x)}{a_1(x)}\,dx + C$$

[Mientras $a_1(x)$ no se anule].
Sin embargo pocas veces es posible reescribir una ecuación diferencial de modo que se reduzca a una forma tan sencilla como (2). No obstante podemos obtener una forma sencilla multiplicando la ecuación original por una función $\mu(x)$ que se llama entonces un “Factor integrante”. Ahora veremos el método para resolver ecuaciones diferenciales lineales valiéndonos de este factor.

Método para resolver ecuaciones lineales

(a) Escriba la ecuación de forma canónica

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

(b) Calcule el factor integrante $\mu(x)$ mediante la fórmula

$$\mu(x)=exp\left[\int P(x)dx\right].$$

(c) Multiplique la ecuación en forma canónica por $\mu(x)$ y, recordando que el lado izquierdo es precisamente $\frac{d}{dx}[\mu(x)]$, obtenga

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+P(x)\mu(x)y=\mu(x)Q(x)\ ,$$

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y)\qquad\qquad =\ \mu(x)Q(x)\ ,$$

(d) Integre la última ecuación y determine y, dividiendo entre $\mu(x)$ para obtener

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)dx+C\right]\qquad (3)$$

Para aplicar estos conceptos probemos con un ejemplo:

Ejemplo 1

Determine la solución general de:

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x^2}=x\cos x\ ,\quad x>0$$

Para escribir esta ecuación lineal en forma canónica, multiplicamos por *x* para obtener:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y\ =\ x^2\ \cos x\qquad (4)$$

En este caso, $P(x)=-2/x$, de modo que:

$$\int P(x)dx=\ \int\frac{-2}{x}\ dx\ =\ -2\ ln\ |x|$$

Así, un factor integrante es:

$$u(x)\ =\ e^{-2\ ln|x|}\ =\ e^{\ln(x^{-2})}\ =\ x^{-2}\ ,$$

Al multiplicar la ecuación (4) por $\mu(x)$ tenemos:

$$x^{-2}\frac{dy}{dx}\ -2x^{-3}y\ =cos\ x\quad ,$$

$$\frac{d}{dx}(x^2y)\qquad =cos\ x\,.$$

Ahora integramos ambos lados y despejamos *y* para obtener:

$$x^{-2}y\int cos\ x\ dx=sen\ x+C$$

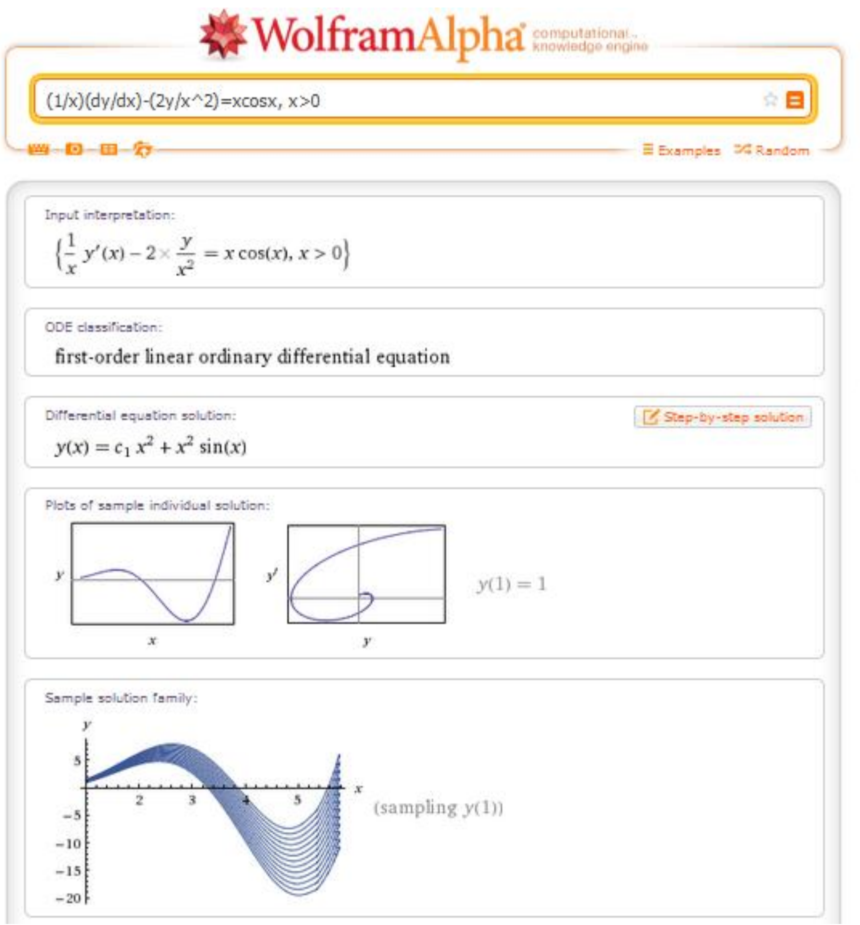
$$y\ =\ x^2\ sen\ x\ +\ Cx^2$$

Ahora procedemos a validar la respuesta en Wolfram.

Validación

Nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y oprimimos la tecla "Enter"

Nota: *Tenga en cuenta que poniendo paréntesis en cada una de las divisiones de la ecuación y eliminando espacios innecesarios puede tener una interpretación más acertada.*



Otra vez evidenciamos la efectividad de esta herramienta para el aprendizaje, nos muestra la interpretación que debemos verificar para saber si la respuesta dada es acorde con el ejercicio, vemos el orden de la ecuación, que por ahora estamos trabajando ecuaciones de primer orden e inmediatamente después nos arroja el resultado que es idéntico al desarrollado en el ejemplo, por lo tanto, podemos afirmar que el ejercicio está solucionado correctamente y como un adicional, Wolfram nos muestra una pequeña gráfica de la forma de la función y de su derivada para ciertas condiciones iniciales *y(1)=1* con el fin de tener una idea general de la función final, y otra gráfica un poco más ampliada con diferentes valores para la constante *C* donde se evidencia la influencia del seno y de la x^2 en la ecuación resultante.

Ejercicios Propuestos

Obtenga la solución general de la ecuación

1. $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$
2. $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + xy = x$,

Resuelva el problema con valor inicial

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} + 2 = 3x$, $y(1) = 1.$
4. $\sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=GDF0bOwo52U

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**