Ecuaciones
diferenciales

unab

Taller No. 2: Ecuaciones separables

Objetivo

Resolver una ecuación diferencial de primer orden aplicando el método de separación de variables.

Conceptualización

Para arrancar el tema, una clase sencilla de ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden resolverse mediante integración es la clase de **ecuaciones separables** o de variables separables, ecuaciones como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,, \qquad (1)$$

Se pueden reescribir de modo que las variables *x* y *y* (junto con sus diferenciales *dx* y *dy*) queden aisladas en lados opuestos de la ecuación, es decir, que de un lado estén las variables con *x* junto con su diferencial *dx* y del otro lado del "=" estén las variables con *y* junto con su diferencial *dy*, es importante el diferencial para que, como se dijo antes, se resuelva la ecuación mediante integración, como en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{y^2 + 1}$$

Es separable, pues (si uno está alerta para detectar la factorización)

$$\frac{2x + xy}{y^2 + 1} = x\frac{2 + y}{y^2 + 1} = g(x)p(y)$$

Sin embargo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy$$

No admite tal factorización del lado derecho de la *y*, por tanto, no es separable.
En otras palabras, una ecuación de primer orden es separable si se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y) \qquad (2)$$

Método para resolver ecuaciones separables

Para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Multiplicamos, factorizamos, dividimos, lo que sea necesario, para separar las variables a un lado las *x's* y al otro las *y's,* en este caso es solo multiplicar de modo que:

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Luego integramos ambos lados:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx\,,$$

$$H(y) = G(x) + C \qquad (3)$$

Donde hemos juntado las dos constantes de integración en un solo símbolo C. La última ecuación proporciona una solución implícita de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1

Resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}, \qquad y(-1) = 0$$

Al separar las variables e integrar tenemos

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+3},$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+3},$$

$$\ln|y-1| = \ln|x+3| + C \qquad (4)$$

En este momento podemos despejar *y* de manera explícita (conservando la constante C) o usar la condición inicial para determinar C y luego despejar *y*, siguiendo el primer camino al exponenciar la ecuación (4), tenemos:

$$e^{ln|y-1|} = e^{ln|x+3|+C} = e^{C}e^{ln|x+3|},$$

$$|y-1| = e^{C}|x+3| = C_1|x+3|, \qquad (5)$$

Donde $C_1 := e^{C}$(el símbolo := significa “se define como”). Ahora, dependiendo de los valores de *y,* tenemos $|y-1| = \pm(y-1)$; y de manera análoga, $|x+3| = \pm(x+3)$. Así podremos escribir (5) como:

$$y - 1 == \pm C_1(x+3) \qquad o \qquad y = 1 \pm C_1(x+3)$$

Donde el signo depende (como ya se indicó) de los valores de x y *y*. Como C_1 es una constante *positiva* (recuerde que $C_1 = e^{C} > 0$), podemos reemplazar $\pm C_1$ por K, donde K representa ahora una constante *arbitraria* no nula. Obtenemos:

$$y = 1 + K(x+3). \qquad (6)$$

Por último, determinamos K de modo que cumpla la condición inicial $y(-1) = 0$. Al hacer $x = -1$ y $y = 0$ en la ecuación (6) tenemos:

$$0 = 1 + K(-1+3) = 1 + 2K,$$

Por lo que $K = -1/2$. Así, la solución del problema con valor inicial es:

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x+3) = -\frac{1}{2}(x+1).$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación no lineal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2x + 1}{\cos y + e^y}$$

Al separar variables e integrar tenemos:

$$(\cos y + e^y)\, dy = (6x^5 - 2x + 1)\, dx\,,$$
$$\int (\cos y + e^y)\, dy = \int (6x^5 - 2x + 1)\, dx$$
$$\operatorname{sen} y + e^y = x^6 - x^2 + x + C\,.$$

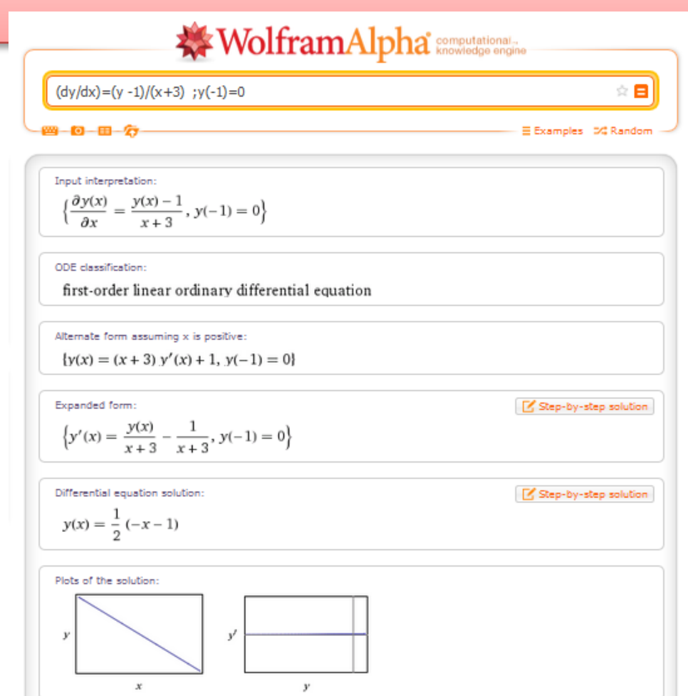
En este momento llegamos a una encrucijada.

Quisiéramos despejar *y* en forma explícita pero no podemos. Esto ocurre con frecuencia al resolver ecuaciones no lineales de primer orden; como en este caso, tendremos que conformarnos con hallar una solución implícita de la solución.

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y oprimimos la tecla "Enter".

Nota: *Tenga en cuenta lo que se muestra en la casilla de interpretación de la entrada puede suceder que solo por introducir un espacio " " de más, el sentido de la ecuación cambie, también ayúdese de los paréntesis (), en el caso de las divisiones para no tener errores*.



En este caso podemos comparar las respuestas, las cuales son iguales y se puede asegurar que el ejercicio se desarrolló con éxito. Ahora solo resta comprobar el segundo ejemplo y seguir practicando aumentando la dificultad de los ejercicios.

Ejercicios propuestos

Resuelva la ecuación

1. $x\frac{dv}{dx} = \frac{1-4v^2}{3v}$
2. $\frac{dy}{dx} = 3x^2(1+y^2)$

Resuelva el problema con valor inicial

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+4x+2}{2y+1}\,, \qquad y(0) = -1.$
4. $\sqrt{y}dx + (1+x)dy = 0\,, \quad y(0) = 1.$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo: http://www.youtube.com/watch?v=v3CsjgKeB7U

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**