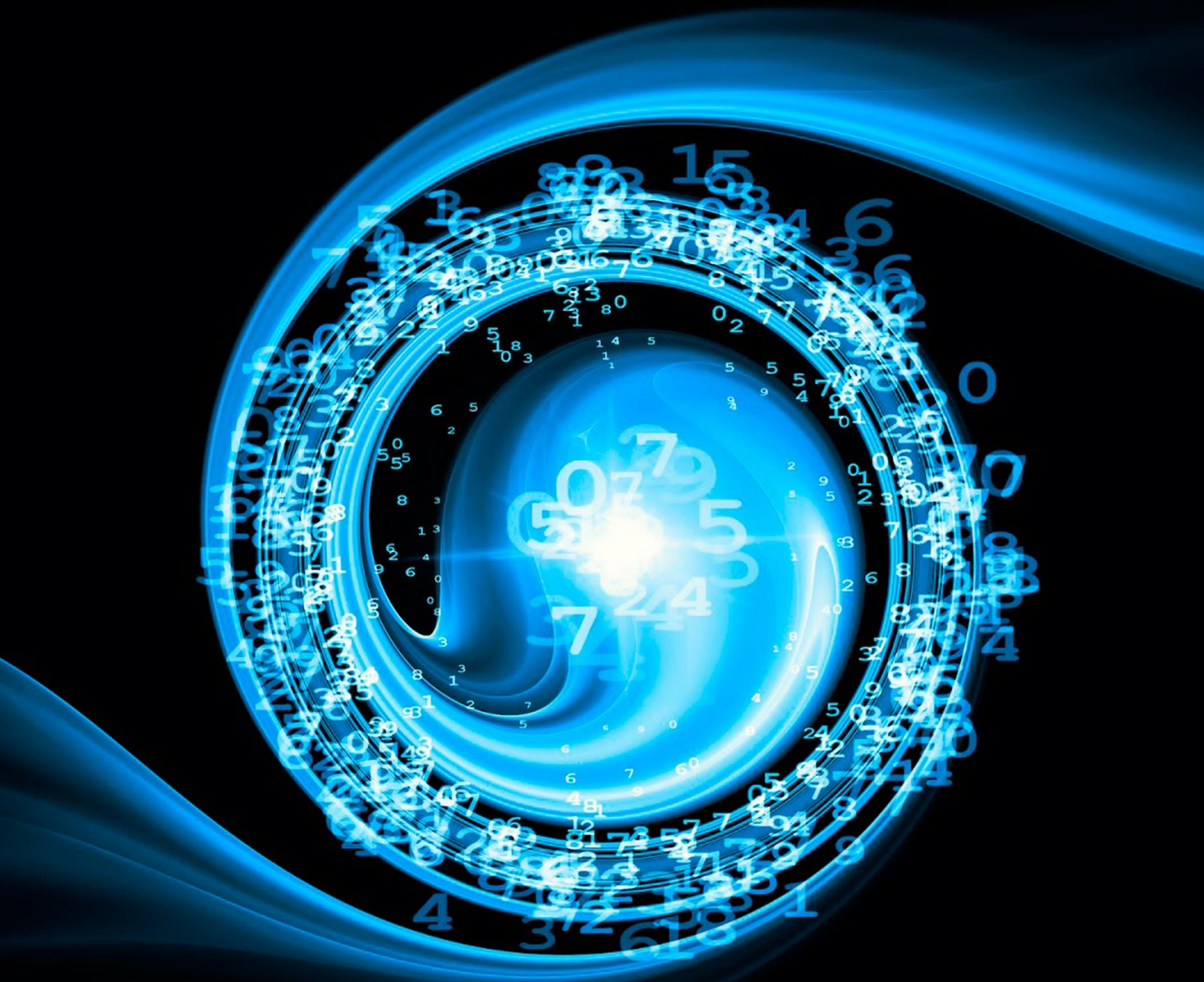
Ecuaciones

diferenciales

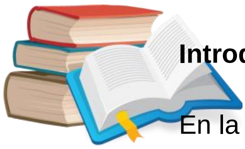


unab

Taller No. 16: Propiedades de la Transformada de Laplace

Objetivo

Reforzar los conocimientos del estudiante en los temas de fundamentación y conceptos para el aprendizaje y entendimiento de las propiedades de la transformada de Laplace.



Introducción

En la guía anterior definimos la transformada de Laplace de una función $f(t)$ como:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \ .$$

El uso de esta definición para obtener una expresión explícita para $\mathcal{L}\{f\}$ requiere la evaluación de la integral impropia, lo que con frecuencia es una tarea tediosa. Ya hemos visto que la propiedad de linealidad de la transformada nos puede ser de ayuda. En esta sección analizamos algunas propiedades adicionales de la transformada de Laplace que simplifican su cálculo. Estas nuevas propiedades nos permitirán usar la transformada de Laplace para resolver problemas con valores iniciales.

Translación en s

Si la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a), \qquad (1)$$

Para $s > \alpha + a$.

Ejemplo 1

Determinar la transformada de Laplace de $e^{at} \sin bt$

Como sabemos de la guía anterior que:

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{(s^2 + b^2)} \ ,$$

Así, por la propiedad de traslación de $F(s)$, tenemos:

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

Transformada de Laplace de la derivada

Sea $f(t)$ continua en $[0, \infty)$ y $f'(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$, ambas de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)\,. \qquad (2)$$

Transformada de Laplace de Derivadas en Orden Superior

Sean $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ continuas en $[0, \infty)$ y sea $f^{(n)}(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$, con todas estas funciones de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'^{(0)} - \dots - f^{n-1}(0), \qquad (3)$$

Los últimos dos teoremas arrojan cierta luz acerca del porqué la transformada de Laplace es una herramienta tan útil para resolver problemas con valores iniciales. A grandes rasgos, nos dicen que al usar la transformada de Laplace podemos reemplazar la “derivación con respecto de *t*” con la “multiplicación por *s*”, convirtiendo con ello una ecuación diferencial en una ecuación algebraica.

Ejemplo 2

Usar la definición anterior y el hecho que:

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \ ,$$

Para determinar $\mathcal{L}\{\cos bt\}$.

Sea $f(t) = \sin bt$. Entonces $f(0) = 0$ y $f'(0) = b\cos bt$. Al sustituir esto en la ecuación (2), tenemos:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) \ ,$$
$$\mathcal{L}\{\mathrm{b}\cos bt\}(s) = s\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) - 0 \ ,$$
$$b\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{sb}{s^2 + b^2} \ .$$

Al dividir entre b tenemos:

$$\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{s}{s^2 + b^2} \ .$$

Derivadas de la Transformada de Laplace

Sean $f(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ y suponga que $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α. Entonces para $s > \alpha$,

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^2}(s)} \ . \quad \mathbf{(4)}$$

Ejemplo 3

Determinar $\mathcal{L}\{\mathrm{t}\sin bt\}$.

Ya es sabido que:

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \ .$$

Al derivar $F(s)$ obtenemos:

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{-2bs}{(s^2 + b^2)^2} \ .$$

Por lo tanto, al usar la fórmula (4), tenemos:

$$\mathcal{L}\{t\sin bt\}(s) = -\frac{dF}{ds}(s) = \frac{-2bs}{(s^2 + b^2)^2} \ .$$

Para una mejor referencia, en la siguiente tabla enumeramos algunas de las propiedades básicas de la transformada de Laplace deducidas hasta ahora.

Tabla 1. Propiedades de la Transformada de Laplace.

$\mathcal{L}\{f + g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$.
$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\}$ para cualquier constante c.
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s - a)$.
$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$.
$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$.
$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.
$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}\{f\}(s)\right)$.

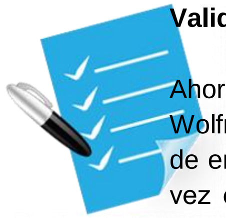
Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera. Pearson Educación, 2009.

Actividad No. 1: Repaso de conceptos clave

Solucione la sopa de letras con las palabras clave de la Guía, relacionadas con las propiedades de la transformada de Laplace.

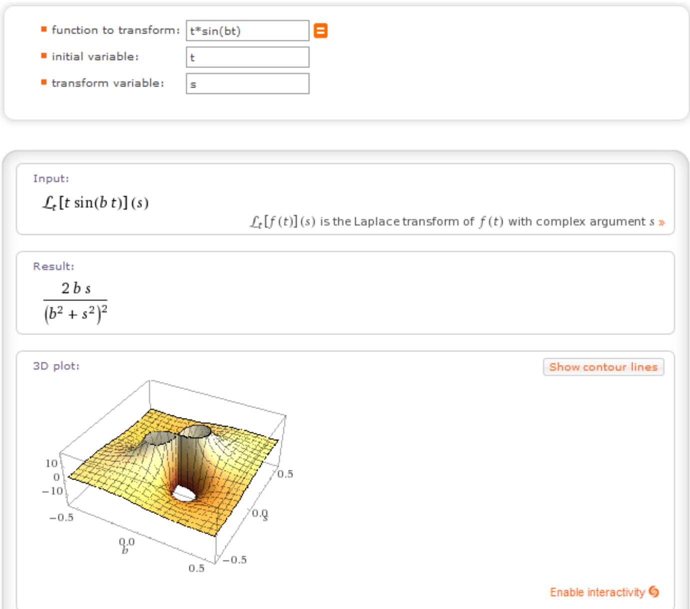
M	D	B	J	A	E	R	S	R	X	V	T	A	Q	N	L
R	O	I	R	E	P	U	S	A	D	A	V	I	R	E	D
T	R	A	N	S	F	O	R	M	A	D	A	I	E	H	W
B	A	D	S	A	I	Z	T	H	H	Ñ	I	B	C	W	E
X	D	E	R	I	V	A	D	A	L	A	P	L	A	C	E
Ñ	I	B	E	V	O	O	Q	A	H	Q	Y	V	L	V	H
I	O	M	Z	D	E	R	I	V	A	D	A	C	P	E	V
W	W	Q	N	I	L	E	V	Q	A	H	H	I	A	I	X
L	G	D	F	B	O	W	W	X	R	O	L	M	L	E	L
H	H	F	V	N	Q	O	A	N	Q	A	A	S	K	Y	O
U	L	L	X	I	K	G	H	J	S	A	S	U	F	O	F
H	I	S	A	H	D	B	Y	X	N	L	Y	V	I	Y	P
F	X	G	G	J	S	J	S	V	Ñ	L	X	W	N	J	M
W	V	Q	T	Q	U	E	P	M	M	R	S	M	S	K	B
W	E	W	Y	L	K	C	L	W	Ñ	Z	S	G	H	I	Z
L	R	A	P	R	N	O	I	C	A	L	S	N	A	R	T

DERIVADA
DERIVADALAPLACE
DERIVADASUPERIOR
LAPLACE
TRANSFORMADA
TRANSLACION



Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente escribimos en el cuadro de entrada de Wolfram las palabras “Laplace Transform”, como se realizó en la guía anterior. Una vez estemos en el recuadro de “Function to Transform”, copiamos la ecuación del ejemplo 3 y podemos oprimir la tecla “Enter”, debido a que las variables que aparecen como las iniciales de la ecuación y la transformada son las mismas que utilizaremos.



Una vez más acertamos en la solución obtenida líneas arriba, y en este caso Wolfram también entrega una gráfica de superficie (3D) de la ecuación resultante.

Ejercicios propuestos

1. Dado que $\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = s/s^2 + b^2$, use la propiedad de translación para calcular $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}$.
2. Partiendo de la transformada $\mathcal{L}\{1\}(s) = 1/s$, use la fórmula (4) para las derivadas de la transformada de Laplace y muestre que $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}$.
3. Use la formula (4) como ayuda para determinar:
   a. $\mathcal{L}\{t\ \cos bt\}$
   b. $\mathcal{L}\{t^2\ \cos bt\}$
4. Muestre que $\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}(s) = n!/(s-a)^{n+1}$ de dos formas:
   a. Use la propiedad de translación para $F(s)$
   b. Use la fórmula (4) para las derivadas de la transformada de Laplace.

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver los siguientes videos a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=V-edqZ_ZZnk
http://www.youtube.com/watch?v=IBxeOxDTcdw

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**