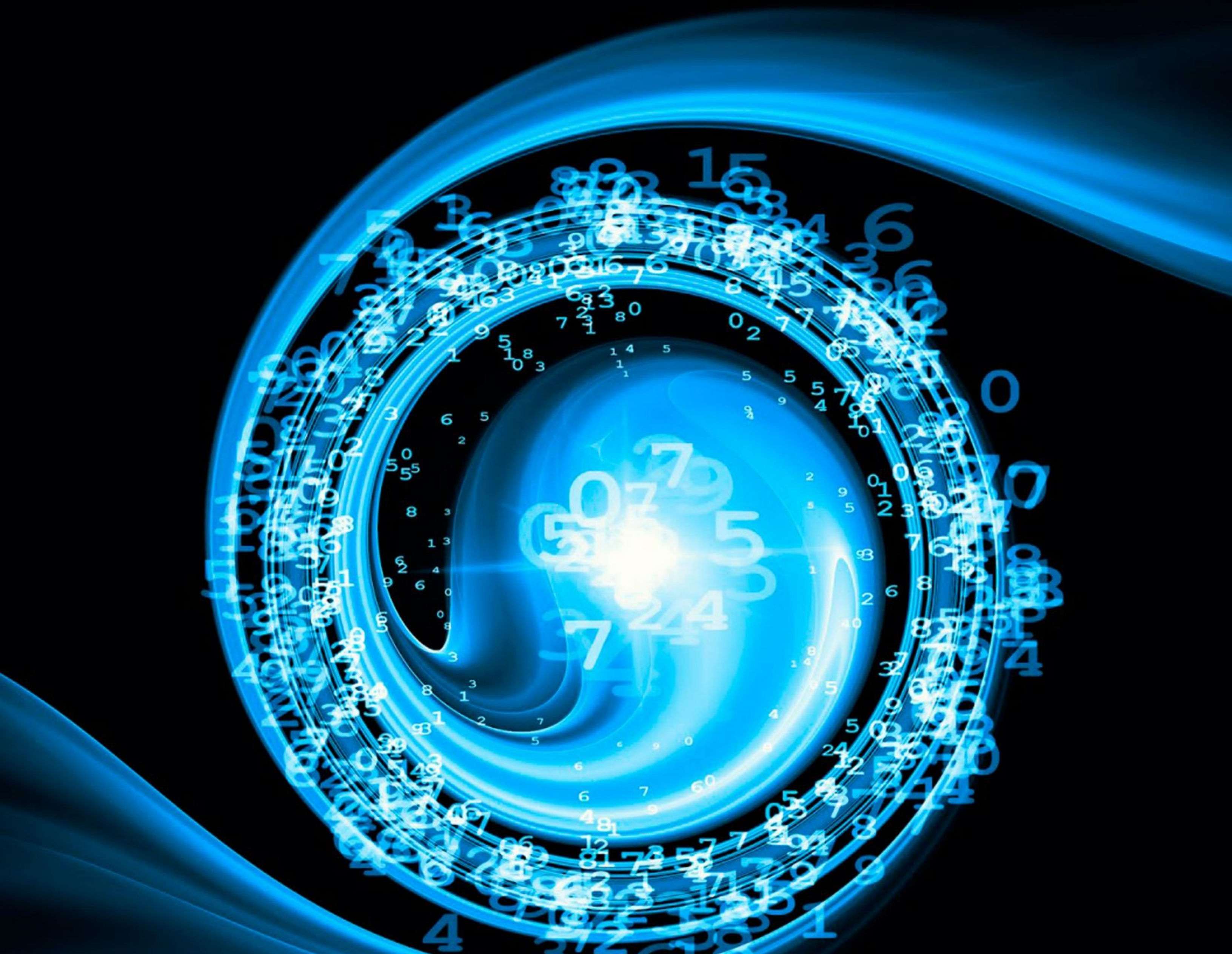
Ecuaciones diferenciales

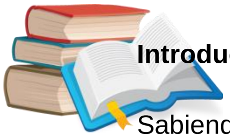


unab

Taller No. 14: Circuitos Eléctricos

Objetivo

Reforzar los temas que fundamentan el conocimiento de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, en el caso específico de los circuitos eléctricos RLC.



Introducción

Sabiendo ya las ecuaciones que describen las relaciones voltaje-corriente para una resistencia, un inductor y un condensador, junto con las leyes de Kirchhoff que restringen el comportamiento de estas cantidades cuando los elementos se conectan en forma eléctrica a un circuito, podemos resolver ecuaciones lineales y sistemas de orden superior, además podemos analizar circuitos eléctricos complejos.

Ejemplo 1

El circuito *RLC* en serie de la Figura 1 tiene una fuente de voltaje dada por $Et = sin100t$ voltios (V), una resistencia de 0.02 ohms (Ω), un inductor de 0.001 henrios (H) y un condensador de 2 faradios (F). (Elegimos estos valores por conveniencia. Los valores típicos para el condensador son mucho menores). Si la corriente y la carga iniciales en el condensador son iguales a cero, determinar la corriente en el circuito para $t > 0$.

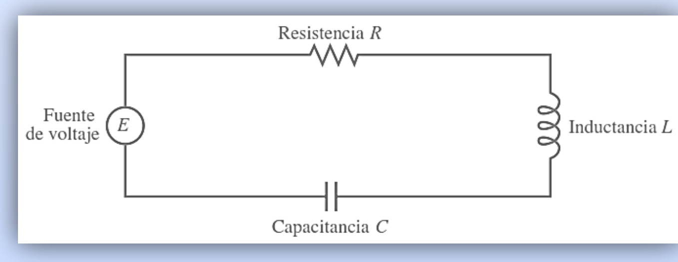


Figura 1. Representación esquemática de un circuito *RLC* en serie.
Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera. Pearson Educación, 2009.

Tenemos que $L = 0.001\,H, R = 0.02\Omega, C = 2F$ y $E(t) = \sin 100t$. Según la ley de corriente de Kirchhoff, la misma corriente I pasa por cada elemento del circuito. La corriente que pasa por el condensador es igual a la razón instantánea de cambio de su carga q:

$$I = dq/dt. \qquad (1)$$

Observamos que la caída de voltaje a través del condensador (E_C), la resistencia (E_R) y el inductor (E_L) se expresan como:

$$E_C = \frac{q}{C}\,, \qquad E_R = RI\,, \qquad E_L = L\frac{dI}{dt}\,, \qquad (2)$$

Por lo tanto, la ley del voltaje de Kirchhoff $E_L + E_R + E_C = E$ se puede expresar como:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q = E(t)\,, \qquad (3)$$

En la mayor parte de las aplicaciones nos interesará determinar la corriente $I(t)$. Si derivamos (3) con respecto de t y sustituimos I en vez de dq/dt, obtenemos:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt}\,, \qquad (4)$$

Al sustituir los valores dados tenemos:

$$(0.001)\frac{d^2I}{dt^2}+(0.02)\frac{dI}{dt}+(0.5)I=100\cos 100t$$

O en forma equivalente,

$$\frac{d^2I}{dt^2}+20\frac{dI}{dt}+500I=100000\cos 100t, \qquad (5)$$

La ecuación homogénea asociada con (5) tiene la ecuación auxiliar

$$r^2+20r+500=(r+10)^2+(20)^2=0\ ,$$

Cuyas raíces son $-10\pm 20i$. Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$I_h(t)=C_1e^{-10t}\cos 20t+C_2e^{-10t}\sin 20t\,, \qquad (6)$$

Para determinar una solución de (5), podemos usar el método de coeficientes indeterminados. Hacemos:

$$I_P(t)=A\cos 100t+B\sin 100t$$

Y realizamos el procedimiento necesario analizado en la guía 12 para obtener finalmente, con tres decimales:

$$A=-10.080\ , \qquad B=2.122\ .$$

Por lo tanto, una solución particular de (5) está dada por:

$$I_P(t)=-10.080\cos 100t+2.122\sin 100t\ . \qquad (7)$$

Como $I=I_h+I_P$, vemos de (6) y (7) que

$$I(t)=e^{-10t}(C_1\cos 20t+C_2\sin 20t\,)-10.080\cos 100t+2.122\sin 100t\ , \qquad (8)$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2, necesitamos los valores $I(0)$ e $I'(0)$. Sabemos que $I(0)=q(0)=0$. Para determinar $I'(0)$, sustituimos los valores para *L*, *R* y *C* en la ecuación (3) e igualamos los dos lados en $t=0$, para obtener

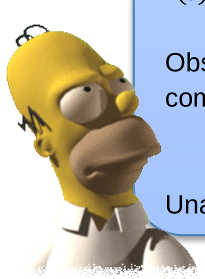
$$(0.001)I'(0)+(0.02)I(0)+(0.5)q(0)=\sin 0\,.$$

Como $I(0)=q(0)=0$, vemos que $I'(0)=0$. Por último, usamos $I(t)$ en (8) y las condiciones iniciales $I(0)=I(t)=0$, para obtener el sistema

$$I(t)=C_1-10.080=0\,,$$
$$I'(0)=-10C_1+20C_2+212.2=0\,.$$

Al resolver este sistema tenemos que $C_1=10.080$ y $C_2=-5.570$. Por lo tanto, la corriente en el circuito *RLC* en serie es:

$$I(t)=e^{-10t}(10.080\cos 20t-5.570\sin 20t\,)-10.080\cos 100t+2.122\sin 100t\ , \qquad (9)$$



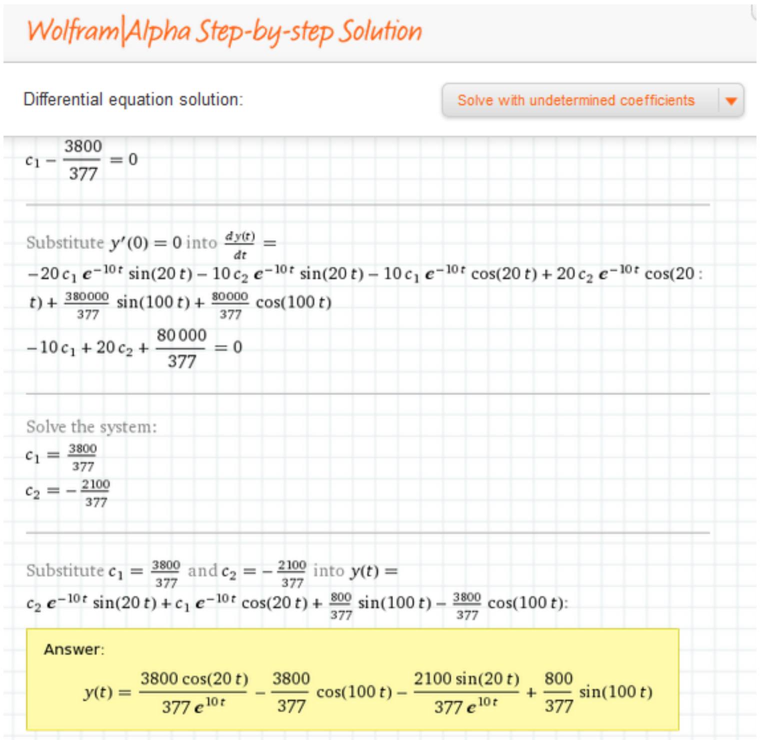
Observe que, como en el caso de las vibraciones mecánicas forzadas, la corriente en (9) tiene dos componentes: I_h, una **corriente transitoria** que tiende a cero cuando $t\to+\infty$, y otra componente

$$I_P(t)=-10.080\cos 100t+2.122\sin 100t\,,$$

Una **corriente de estado estacionario** senoidal que permanece.

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1, para ello y mayor entendimiento de las entradas del software, introducimos la ecuación (5); como se ha mencionado en guías anteriores, se utiliza la notación de Newton $y'(x)$; no olvidar introducir las condiciones iniciales. En esta ocasión para obtener la solución adecuada utilizaremos la solución paso a paso de la ecuación diferencial de Wolfram Alpha, simplemente debemos presionar en la esquina superior derecha del recuadro de la solución de la ecuación diferencial (Step-by-step solution), enseguida se abrirá una ventana pidiéndonos introducir un usuario y contraseña, este proceso es gratuito y necesario para continuar solo se requiere una dirección de correo electrónico además de crear una contraseña. Una vez registrados hacemos clic en el botón Sign In y se abrirá la solución paso a paso de la ED.


Wolfram|Alpha Step-by-step Solution

Differential equation solution: Solve with undetermined coefficients

$c_1 - \frac{3800}{377} = 0$

Substitute $y'(0) = 0$ into $\frac{dy(t)}{dt} =$
$-20\,c_1\,e^{-10t}\sin(20t) - 10\,c_2\,e^{-10t}\sin(20t) - 10\,c_1\,e^{-10t}\cos(20t) + 20\,c_2\,e^{-10t}\cos(20t) + \frac{380000}{377}\sin(100t) + \frac{80000}{377}\cos(100t)$

$-10\,c_1 + 20\,c_2 + \frac{80\,000}{377} = 0$

Solve the system:
$c_1 = \frac{3800}{377}$
$c_2 = -\frac{2100}{377}$

Substitute $c_1 = \frac{3800}{377}$ and $c_2 = -\frac{2100}{377}$ into $y(t) =$
$c_2\,e^{-10t}\sin(20t) + c_1\,e^{-10t}\cos(20t) + \frac{800}{377}\sin(100t) - \frac{3800}{377}\cos(100t)$:

Answer:

$$y(t) = \frac{3800\cos(20t)}{377\,e^{10t}} - \frac{3800}{377}\cos(100t) - \frac{2100\sin(20t)}{377\,e^{10t}} + \frac{800}{377}\sin(100t)$$

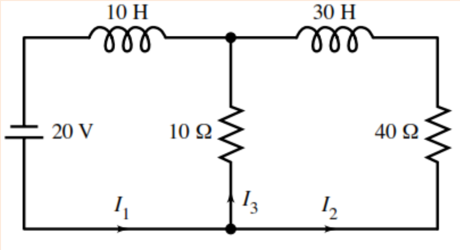
Todo este proceso se realizó para poder seleccionar el método de solución de la ED, que es una opción en la solución paso a paso de Wolfram, en frente de donde dice “Differential equation solution”, nos fijamos que esté seleccionada la opción de resolver por coeficientes indeterminados, que es el método que utilizamos en el ejemplo, luego podemos ver una solución paso a paso u oprimimos donde dice mostrar todos los pasos y finalmente en la parte inferior en un recuadro amarillo nos aparecerá la solución de la ED idéntica a la obtenida líneas arriba en el ejemplo. Esto demuestra la utilización de Wolfram Alpha como herramienta de aprendizaje debido a que teniendo paso a paso la solución de la ED se despejan todas las dudas al respecto. Hay que tener en cuenta que al ser una opción gratuita la página solo permitirá realizar este proceso 3 veces al día.

Ejercicios propuestos

1. Un circuito RLC en serie tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = 10\cos 20t$ V, una resistencia de 120Ω, un inductor de $4\,H$ y un condensador de $(2200)^{-1}F$. Determine la

corriente (solución) de estado estacionario para el circuito. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia para el circuito?

2. Un circuito LC en serie tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = 30\sin 20t$ V, un inductor de $2\ H$ y un condensador de $0.02\ F$ (sin resistencias). ¿Cuál es la corriente en el circuito para $t > 0$ si en $t = 0$, $I(0) = q(0) = 0$?
3. Un circuito RLC en serie tiene una fuente de voltaje de la forma $E(t) = E_0 \cos\gamma t$ V, una resistencia de $10\ \Omega$, un inductor de $4\ H$ y un condensador de $0.01\ F$. Bosqueje la curva de la respuesta de frecuencia para este circuito.
4. Determine un sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales para la corriente de las redes dadas en el diagrama esquemático:



No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=HwrEJcgVt3A

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**