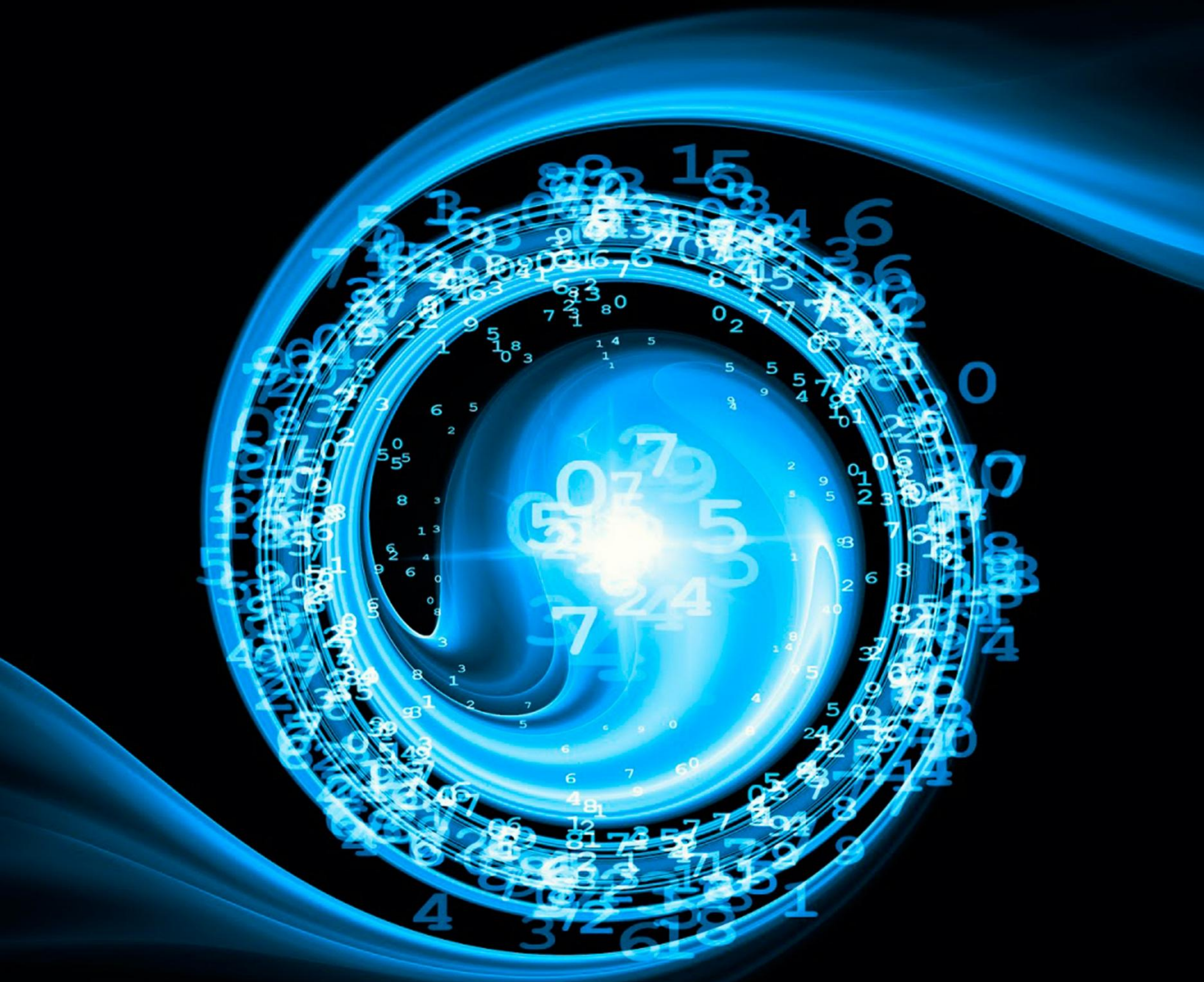
Ecuaciones

diferenciales



unab

Taller No. 13: Variación de Parámetros

Objetivo

Obtener la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas por el método de variación de parámetros.

Introducción

Considere la ecuación lineal no homogénea de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad (1)$$

Y sean $\{y_1(t), y_2(t)\}$ dos soluciones linealmente independientes para la ecuación homogénea correspondiente

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

Entonces, sabemos que la solución general de esta ecuación homogénea está dada por:

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\,, \qquad (2)$$

Donde c_1 y c_2 son constantes. Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea, la estrategia de la variación de parámetros consiste en reemplazar las constantes en (2) por funciones de t. Es decir, buscamos una solución de (1) de la forma

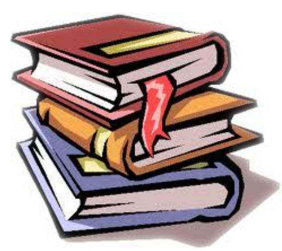
$$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t), \qquad (3)$$

Como se introdujeron dos funciones incógnitas $v_1(t)$ y $v_2(t)$, es razonable esperar que podamos imponer dos ecuaciones (requisitos) sobre estas funciones. Naturalmente, una de estas ecuaciones debe provenir de (1). Así, introducimos $y_p(t)$ dada por (3) en (1). Para realizar esto, primero debemos calcular $y'_p(t)$ y $y''_p(t)$. De (3) obtenemos

$$y'_p(t) = (v'_1 y_1 + v'_2 y_2) + (v_1 y'_1 + v_2 y'_2)\,.$$

Para simplificar los cálculos y evitar derivadas de segundo orden para las incógnitas v_1, v_2 en la expresión para y''_p imponemos la condición

$$v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \quad . \qquad (4)$$



Así, la fórmula para y'_p se convierte en:

$$y'_p = v_1 y'_1 + v_2 y'_2 \;, \quad (5)$$

Y entonces,

$$y''_p = v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 y'_2 + v_2 y''_2\,, \qquad (6)$$

Ahora, al sustituir y_p, y'_p y y''_p dadas por (3), (5) y (6) en (1) tenemos:

$$\begin{aligned} g &= ay''_p + by'_p + cy_p \qquad (7)\\ &= a(v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 y'_2 + v_2 y''_2) + b(v_1 y'_1 + v_2 y'_2) + c(v_1 y_1 + v_2 y_2)\\ &= a\left(v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2\right) + v_1\left(ay''_1 + by'_1 + cy_1\right) + v_2\left(ay''_2 + by'_2 + cy_2\right)\\ &= a\left(v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2\right) + 0 + 0 \end{aligned}$$

Ya que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, (7) se reduce a:

$$v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = \frac{g}{a}\,. \qquad (8)$$

En resumen, podemos hallar v_1 y $v_2$que satisfagan (4) y (8), es decir,

$$v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \ , \quad (9)$$
$$v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = \frac{g}{a} ,$$

Entonces y_p dada por (3) será una solución particular de (1). Para determinar v_1 y v_2, primero resolvemos el sistema lineal (9) en términos de v'_1 y v'_2. Usamos la regla de Cramer para obtener

$$v'_1(t) = \frac{-g(t)y_2(t)}{a\left[y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)\right]} \qquad y \qquad v'_2(t) = \frac{-g(t)y_1(t)}{a\left[y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)\right]} \ ,$$

Donde la expresión en corchetes del denominador nunca se anula. Al integrar estas ecuaciones obtenemos finalmente:

$$v_1(t) = \int \frac{-g(t)y_2(t)}{a\left[y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)\right]} dt \qquad y \qquad v_2(t) = \int \frac{-g(t)y_1(t)}{a\left[y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t)\right]} dt \ . (10)$$

Repasemos este procedimiento:

Método de variación de parámetros

Para determinar una solución particular de $ay'' + by' + cy = g$:

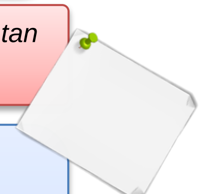
a) Se hallan dos soluciones linealmente dependientes $\{y_1(t), y_2(t)\}$ de la ecuación homogénea correspondiente y se considera

$$y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t) \ .$$

b) Se determinan $v_1(t)$ y $v_2(t)$ resolviendo el sistema (9) en términos de $v'_1(t)$ y $v'_2(t)$ y se integra.

c) Se sustituye $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en la expresión para $y_p(t)$ y así obtener una solución particular.

Nota: *Por supuesto, en el paso (b) se pueden usar las fórmulas en (10), pero $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son tan fáciles de derivar que es recomendable no memorizarlas.*



Ejemplo 1

Determinar una solución general en $(-\pi/2, \ \pi/2)$ de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \tan t \ . \quad (11)$$

Observe que dos soluciones independientes de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ son $\cos t \ y \ \sin t$. Ahora hacemos

$$y_p(t) = v_1(t)\cos t + v_2(t)\sin t, \qquad (12)$$

Y, en relación con (9), resolvemos el sistema

$$(\cos t)v'_1(t) + (\sin t)v'_2(t) = 0 \ ,$$
$$(-\sin t)v'_1(t) + (\cos t)v'_2(t) = \tan t \ ,$$

En términos de $v'_1(t)$ y $v'_2(t)$. Esto da

$$v'_1(t) = -\tan t \sin t \ ,$$
$$v'_2(t) = \tan t \cos t = \sin t \ ,$$

Al integrar obtenemos:

$$v_1(t) = -\int \tan t \sin t \, dt = -\int \frac{sin^2 t}{\cos t} dt, \quad (13)$$
$$= -\int \frac{1 - cos^2 t}{\cos t} dt = \int (\cos t - \sec t)\, dt$$
$$= \sin t - \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \ ,$$
$$v_2(t) = \int \sin t \, dt = -\cos t + C_2$$

Solo necesitamos una solución particular, de modo que igualamos C_1 y C_2 para simplificar los cálculos. Luego, al sustituir $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en (12), obtenemos:

$$y_p(t) = (\sin t - \ln|\sec t + \tan t|) \cos t - \cos t \sin t \quad ,$$

Lo que se simplifica como

$$y_p(t) = -(\cos t) \ln|sec\, t + tan\, t| \ ,$$

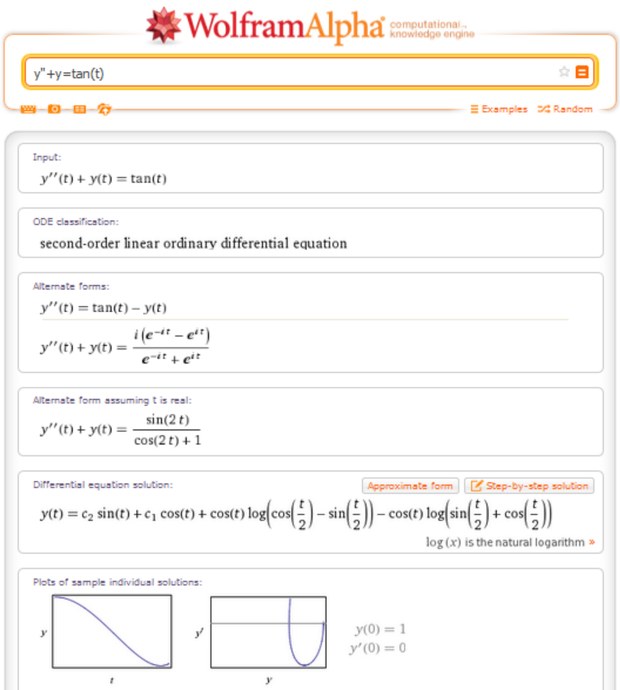
Podemos eliminar los símbolos de valor absoluto porque $sec\, t + tan\, t = (1 + \sin t)/ \cos t > 0$ para $(-\pi/2 < t < \pi/2)$.

Recuerde que una solución general de una ecuación no homogénea está dada por la suma de una solución general de la ecuación homogénea y una solución particular. En consecuencia, una solución general de la ecuación (11) en el intervalo $(-\pi/2, \ \pi/2)$ es

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - (\cos t) \ln(sec\, t + tan\, t) \ , \quad (14)$$

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y oprimimos la tecla “Enter”.



En este caso, nuestra solución dista un poco de la solución obtenida líneas arriba, esto debido a que falta factorizar el coseno de los logaritmos y que no introducimos el intervalo en el cual queremos hallar la función. Vale la pena recordar que los logaritmos que aparecen en la solución son logaritmos naturales, tal y como lo explica en la parte inferior del recuadro de solución que en Wolfram tienen la notación de log.

Ejercicios propuestos

Determine una solución general de la ecuación diferencial usando el método que se analizó en la guía:

1. $y'' + y = \sec t$
2. $y'' + 9y = sec^2(3t)$
3. $y'' + 4y = csc^2(2t)$

Determine una solución general de la ecuación diferencial:

4. $v'' + 4v = sec^4(2t)$
5. $y'' + y = 3\sec t - t^2 + 1$
6. $y'' + 5y' + 6y = 18t^2$
7. $y'' - 6y' + 9y = t^{-3}e^{3t}$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=W-lP0MnrwDk

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.

Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**