Ecuaciones
diferenciales

unab

Taller No. 12: Ecuaciones No Homogéneas
Método de Coeficientes Indeterminados

Objetivo

Obtener una solución particular a ecuaciones diferenciales no homogéneas, por el método de coeficientes indeterminados.

Introducción

En esta guía usaremos una "estimación juiciosa" y deduciremos un procedimiento sencillo para determinar una solución de una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = f(t), \qquad (1)$$

Donde la no homogeneidad $f(t)$ es un único termino de un tipo especial. Nuestra experiencia en ecuaciones diferenciales nos indica que (1) tendrá una infinidad de soluciones. Por el momento nos conformaremos con obtener una solución particular. Para motivar el procedimiento, veremos primero algunos ejemplos ilustrativos:

Ejemplo 1

Determinar una solución particular de:

$$y'' + 3y' + 2y = 3t, \qquad (2)$$

Necesitamos hallar una función $y(t)$ tal que la combinación $y'' + 3y' + 2y$ sea una función lineal de t, a saber, $3t$. ¿Qué tipo de función y "termina" como una función lineal después de combinar sus derivadas de orden cero, uno y dos? Una respuesta inmediata es *otra función lineal*, así que hacemos una prueba con $y_1(x) = At$ y trataremos de hacer corresponder $y''_1 + 3y'_1 + 2y_1$ con $3t$. Tal vez usted haya notado por qué esto no funciona: $y_1 = At,\ y'_1 = A$ y $y''_1 = 0$, implica que: $y''_1 + 3y'_1 + 2y_1 = 3A + 2At$

Comentario [OTN1]: Pregunta confusa. Solicitar al experto aclaración.

Y para que eso sea igual a $3t$, necesitamos que $A = 0$ y que $A = 3/2$. Tendríamos mejor suerte si agregamos un término constante a la función de prueba: $y_2(t) = At + B$. Entonces $y'_2 = A,\ y''_2 = 0$ y $y''_2 + 3y'_2 + 2y_2 = 3A + 2(At + B) = 2At + (3A + 2B)$,

Lo que concuerda exitosamente con $3t$ si $2A = 3$ y $3A + 2B = 0$. Al resolver este sistema tenemos que $A = 3/2$ y $B = -9/4$. Así la función

$$y_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}$$

Es una solución de (2).

El ejemplo 1 sugiere el siguiente método para determinar una solución particular de la ecuación:

$$ay'' + by' + cy = Ct^m, \qquad m = 0, 1, 2, \dots;$$

A saber, proponemos una solución de la forma

$$y_p(t) = A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0\ ,$$

Con coeficientes indeterminados A_j, y hacemos corresponder las potencias de t en $ay'' + by' + cy$ con Ct^m. Este procedimiento implica resolver $m+1$ ecuaciones lineales con $m+1$ incógnitas $A_0, A_1, \dots, A_m$ con la esperanza de que tengan solución.

Ejemplo 2

Determinar una solución particular de:

$$y'' + 3y' + 2y = 10e^{3t}, \qquad (3)$$

Suponemos que $y_p(t) = Ae^{3t}$, pues entonces y'_p y y''_p mantendrán la forma exponencial:

$$y''_p + 3y'_p + 2y_p = 9Ae^{3t} + 3(3Ae^{3t}) + 2(Ae^{3t}) = 20Ae^{3t}$$

Al hacer $20Ae^{3t} = 10Ae^{3t}$ y despejar A tenemos que $A = 1/2$; así,

$y_p(t) = \frac{e^{3t}}{2}$

Es una solución de (3).

Ejemplo 3

Determinar una solución particular de:

$$y'' + 3y' + 2y = \sin t. \qquad (4)$$

Nuestra acción inicial seria suponer que $y_1(t) = A\sin t$, pero esto no funciona pues las derivadas introducen términos con cosenos:

$$y''_1 + 3y'_1 + 2y_1 = -A\sin t + 3A\cos t + 2A\sin t = A\sin t + 3A\cos t\,,$$

Y al hacer corresponder esto con $\sin t$, deberá ocurrir que A sea igual a 1 y a 0. Así incluimos el término del coseno en la solución de prueba:

$$y_p(t) = A\sin t + B\cos t\,,$$
$$y_p(t) = A\sin t - B\cos t\,,$$
$$y_p(t) = -A\sin t - B\cos t\,,$$

De modo que (4) se convierte en:

$$\begin{aligned} y''_p(t) + 3y'_p(t) + 2y_p(t) &= -A\sin t - B\cos t + 3A\sin t - 3B\cos t + 2A\sin t + 2B\cos t \\ &= (A-3B)\sin t + (B+3A)\cos t \\ &= \sin t\ . \end{aligned}$$

Las ecuaciones $A - 3B = 1, B + 3A = 0$ tienen la solución $A = 0.1, B = -0.3$. Así, la función

$$y_p(t) = 0.1\sin t - 0.3\cos t$$

Es una solución particular de (4)

Para una ecuación de la forma

$$ay'' + by' + cy = C\sin\beta t\ (o\ C\cos\beta)\ , \qquad (5)$$

El método de coeficientes indeterminados sugiere intentar con:

$$y_p(t) = A\sin\beta t + B\cos\beta t\ , \qquad (6)$$

Y resolver (5) en términos de las incógnitas A y B.

Raíces reales distintas

Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = Ct^m e^{rt}$, use la forma

$$y_p(t) = t^s(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt}, \quad (7)$$

Con

(i) $s = 0$ si r no es raíz de la ecuación auxiliar asociada;
(ii) $s = 1$ si r es raíz simple de la ecuación auxiliar asociada; y
(iii) $s = 1$ si r es raíz doble de la ecuación auxiliar asociada.

Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = Ct^m e^{rt}\cos\beta t$ o $ay'' + by' + cy = Ct^m e^{rt}\sin\beta t$, use la forma

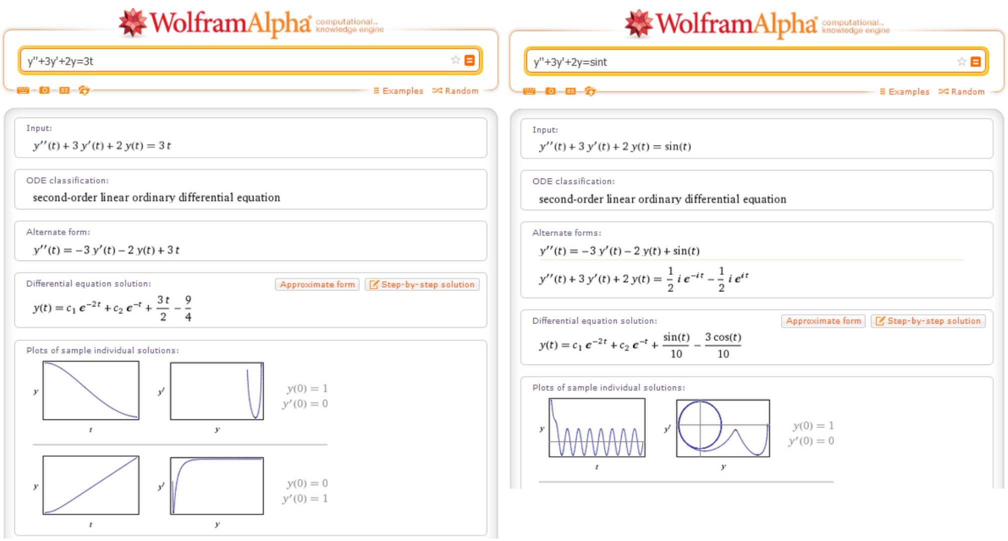
$$y_p(t) = t^s(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt}\cos\beta t + t^s(A_m t^m + \cdots + A_1 t + A_0)e^{rt}\sin\beta t\ ,$$

Con

(iv) $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz de la ecuación auxiliar asociada; y
(v) $s = 1$ si $\alpha + i\beta$ es raíz simple de la ecuación auxiliar asociada.

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el link de la página de Wolfram Alpha o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y oprimimos la tecla “Enter”.



En la imagen anterior tenemos en la columna izquierda el ejemplo 1 y en la derecha el ejemplo 3, en las cuales se puede ver, en el cuarto recuadro bajando, la solución de la ecuación diferencial, y en los dos casos se puede observar que las soluciones de las ED no homogéneas concuerdan con las soluciones obtenidas líneas arriba. Vemos también que en la gráfica de la función de la columna derecha tiene una respuesta sinusoidal, tal como lo representa la ecuación; al igual, en la función de la columna izquierda vemos una respuesta lineal de acuerdo con la ecuación obtenida.

Ejercicios propuestos

Decida si puede aplicarse o no el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular:

1. $2w''(x) - 3w(x) = 4x\, sin^2x + 4x\, cos^2x$
2. $x'' + 5x' - 3x = 3^t$
3. $ty'' - y' + 2y = \sin 3t$

Determine una solución particular de la ecuación diferencial:

4. $4y'' + 11y' - 3y = -2e^{-3t}$
5. $y''(x) - 7y'(x) = x^2$
6. $y'' + 2y' + 2y = 4te^{-t}\cos t$
7. $y'' + 2y' + 4y = 111e^{2t}\cos 3t$

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=OZNODvAwYtU

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*****: Computational Knowledge Engine**