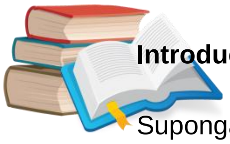
Ecuaciones diferenciales

unab

Taller No. 11: Ecuaciones Lineales de Segundo Orden
El Oscilador Masa-Resorte Forzado

Objetivo

Reforzar los temas que fundamentan el conocimiento de las ecuaciones diferenciales de segundo orden en el caso específico del oscilador masa-resorte forzado.



Introducción

Suponga que ahora tomamos en consideración una fuerza externa $f(x)$ que actúa sobre una masa vibratoria en un resorte. Por ejemplo, $f(x)$ podría representar una fuerza conducida que ocasiona movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte. La inclusión de $f(x)$ en la formulación de la segunda ley de Newton da la ecuación diferencial del **movimiento forzado**:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t). \qquad (1)$$

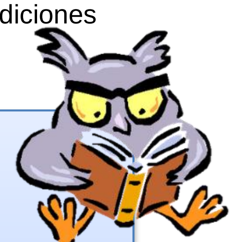
Al dividir (1) entre m se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = F(t), \qquad (2)$$

Donde $F(t) = f(t)/m$ y, como en la guía anterior, $2\lambda = \beta/m$, $w^2 = k/m$. Para resolver la última ecuación no homogénea podemos usar el método de coeficientes indeterminados o la variación de parámetros.

Términos Transitorio y Permanente

Cuando F es una función periódica, tal como $F(t) = F_0 \sin\gamma t$ o $F(t) = F_0 \cos\gamma t$, la solución general de (2) para $\lambda > 0$ es la suma de una función no periódica $x_p(t)$. Además, $x_c(t)$ se extingue a medida que el tiempo aumenta. Por lo tanto, para un periodo largo, los desplazamientos de la masa están muy aproximados por la solución particular $x_p(t)$. Se dice que la función complementaria $x_c(t)$ es un **término transitorio** o una **solución transitoria**, y la función $x_p(t)$, la parte de la solución que permanece después de un intervalo de tiempo, se denomina **término permanente** o **solución permanente.** En consecuencia, observe que el efecto de las condiciones iniciales sobre un sistema masa-resorte conducido por F es transitorio.



Ejemplo 1

Interpretar y resolver el problema de valor inicial

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos 4t\,, \qquad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0 \qquad (3)$$

Podemos interpretar el problema para representar un sistema vibratorio que consista en una masa $\left(m = \frac{1}{5}\ slug\ o\ kilogramo\right)$ unida a un resorte $(K = 2\ lb/ft\ \ o\ \ N/m)$. La masa se libera del reposo a $\frac{1}{2}$ unidad (pies o metros) por debajo de la posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado $(\beta = 1.2)$ y está siendo conducido por una fuerza periódica externa $(T = \pi/2\ s)$ que comienza en $t = 0$. De manera intuitiva, esperaríamos que incluso con el amortiguamiento, el sistema permaneciera en movimiento hasta el momento en que la función forzada fuera “desactivada”. Sin embargo, según el problema dado, $f(t) = 5\cos 4t$ seguiría “activa” por siempre.

Primero multiplicamos la ecuación diferencial dada en (3) por 5 y resolvemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

Aplicando los métodos acostumbrados. Como $m_1 = -3 + i$, $m_2 = -3 - i$, se deduce que:

$$x_c(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

Mediante el método de coeficientes indeterminados, asumimos una solución particular de la forma $x_p(t) = A\cos 4t + B\sin 4t$. Si diferenciamos $x_p(t)$ y sustituimos en la ED obtenemos:

$$x''_p + 6x'_p + 10x_p = (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\sin 4t = 25\cos 4t.$$

El sistema de la ecuación resultante:

$$-6 + 24B = 25, \qquad -24A - 6B = 0$$

Produce $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. De esto se deduce que:

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

Cuando establecemos $t = 0$ en la ecuación anterior obtenemos $c_1 = \frac{38}{55}$. Al diferenciar la expresión y establecer después $t = 0$, también encontramos que $c_2 = -\frac{86}{51}$. Por lo tanto,

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{55}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

Ecuación Diferencial de Movimiento Forzado No Amortiguado

Con una fuerza periódica impresa y ninguna fuerza amortiguadora, no hay término transitorio en la solución de un problema. También veremos que una fuerza periódica impresa con una frecuencia cercana o igual a la frecuencia de las vibraciones libres no amortiguadas puede ocasionar un problema severo en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

Ejemplo 2

Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = F_0 \sin \gamma t\,, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \qquad (4)$$

Donde F_0 es una constante y $\gamma \neq w$.
La función complementaria es $x_c(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$. Para obtener una solución particular asumimos que $x_p(t) = A\cos \gamma t + B\sin \gamma t$, entonces,

$$x''_p + w^2x_p = A(w^2 - \gamma^2)\cos \gamma t + B(w^2 - \gamma^2)\sin \gamma t = F_0 \sin \gamma t.$$

Al igualar los coeficientes obtenemos inmediatamente $A = 0$ y $B = F_0/(w^2 - \gamma^2)$. Por lo tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(w^2 - \gamma^2)}\sin \gamma t$$

Cuando se aplican las condiciones iniciales a la solución general

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_1 \sin wt + \frac{F_0}{(w^2 - \gamma^2)} \sin \gamma t$$

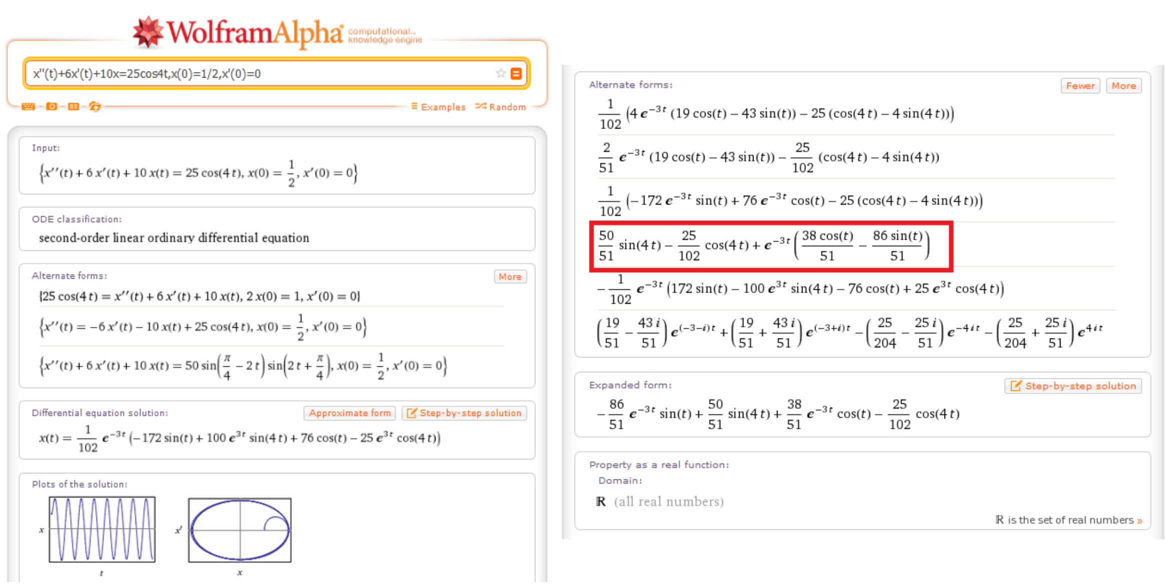
Se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = -\gamma F_0 / w(w^2 - \gamma^2)$. Por lo tanto, la solución es:

$$\frac{F_0}{w(w^2 - \gamma^2)} (-\gamma \sin wt + w \sin \gamma t), \qquad \gamma \neq w.$$

Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, y posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y oprimimos la tecla "Enter".

Para este caso en particular, tenemos que realizar unas modificaciones, además de las usuales. Aparte de colocar paréntesis a las divisiones y separar las condiciones iniciales con comas o puntos y comas. Esta vez para una mejor comprensión de las entradas de Wolfram tenemos que cambiar la notación de la ecuación, es decir, que no utilizaremos la notación usual de Leibniz (dy/dx), y utilizaremos la notación de Newton (y'(x)), además cambiar los fraccionarios por números decimales. Así mismo, escribimos la ecuación después de la primera operación de multiplicarla por 5, todo esto para evitarle el cálculo al software y así obtener el resultado más rápidamente y tener una interpretación adecuada, debido a que si la ecuación de entrada es muy larga y tiene muchas operaciones, el software no tome toda la ecuación.



Una vez más tenemos dos columnas debido a que a simple vista no pareciera que los resultados del software coinciden con los obtenidos, para despejar nuestras dudas basta con hacer un clic en la solución de la ED y Wolfram toma esta ecuación como una entrada, ello para conocer las formas alternativas de la ecuación y compararlas con la ecuación obtenida. Satisfactoriamente, en el 3er renglón de las formas alternativas (columna derecha resaltada con rojo) obtenemos nuestro resultado, el cual es el mismo obtenido en el desarrollo del ejemplo, además vemos la gráfica de la función que concuerda con una respuesta sinusoidal.

Ejercicios propuestos

Utilice el método que se analizó en la guía para resolver:

1. Cuando una masa de 1 slug se sujeta a un resorte, lo estira 2 pies y después descansa en su posición de equilibrio. Comenzando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = 8\sin 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación de movimiento si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.
2. En el problema anterior determine la ecuación de movimiento si la fuerza externa es $f(t) = e^{-t}\sin 4t$. Analice los desplazamientos para $t \to \infty$.
3. Cuando una masa de 2 kilogramos se sujeta a un resorte cuya constante es de 32 N/m, el resorte vuelve a su posición de equilibrio. Comenzando en $t = 0$, una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t}\cos 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación de movimiento en ausencia de amortiguamiento.
4. En el problema anterior, escriba la ecuación de movimiento de la forma $x(t) = A\sin(wt + \phi) + Be^{-2t}\sin(4t + \theta)$. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones después de un tiempo muy largo?

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.
Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=qDXl_wnkAn8

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.

Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*: Computational Knowledge Engine**