Ecuaciones

diferenciales

unab

Taller No. 10: Ecuaciones Lineales de Segundo Orden
El Oscilador Masa-Resorte Amortiguado

Objetivo

Reforzar los temas que fundamentan el conocimiento de las ecuaciones diferenciales de segundo orden en el caso específico del oscilador masa-resorte amortiguado.

Introducción

En el estudio de la mecánica, las fuerzas amortiguadoras que actúan sobre un cuerpo se consideran proporcionales a la potencia de la velocidad instantánea. En particular, a lo largo del siguiente análisis asumiremos que esta fuerza está determinada por un múltiplo constante de $dx/dt.$ Cuando no se aplican otras fuerzas externas al sistema, de la segunda ley de Newton se deduce que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \qquad (1)$$

Donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es consecuencia de que la fuerza de amortiguamiento actúa en dirección opuesta al movimiento.

Si se divide (1) entre la masa m, encontramos que la ecuación diferencial del **movimiento libre amortiguado** es $d^2x/dt^2 + (\beta/m)dx/dt + (k/m)x = 0$ o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = 0, \qquad (2)$$

Donde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \qquad w^2 = \frac{k}{m}. \qquad (3)$$

El símbolo 2λ se usa únicamente por conveniencia algebraica, dado que la ecuación auxiliar es $m^2 + 2\lambda m + w^2 = 0$, y por lo tanto las raíces correspondientes son:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w^2}.$$

Ahora podemos distinguir tres casos posibles que dependen del signo algebraico de $\lambda^2 - w^2$. Dado que cada solución contiene el *factor de amortiguamiento* $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, los desplazamientos de la masa se vuelven insignificantes para un largo periodo.

Caso I. $\lambda^2 - w^2 > 0$. En esta situación se dice que el sistema está **sobreamortiguado** debido a que el coeficiente de amortiguación β es mayor cuando se compara con la constante del resorte k. La correspondiente solución de (2) es $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-w^2}t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-w^2}t}\right). \qquad (4)$$

Esta ecuación representa un movimiento suave no oscilatorio.

Caso II. $\lambda^2 - w^2 = 0$. Se dice que el sistema está **críticamente amortiguado** debido a que cualquier disminución ligera en la fuerza de amortiguamiento resultaría en un movimiento oscilatorio. La solución general de (2) es $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ o

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t) \qquad (5)$$

El movimiento de la curva es muy similar al de un sistema sobreamortiguado. En (5) también es posible advertir que la masa puede atravesar la posición de equilibrio cuando mucho una vez.

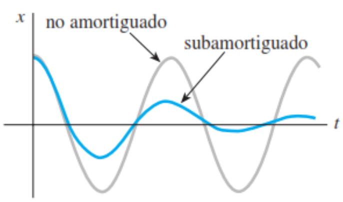
Un ejemplo práctico de sistema oscilante fuertemente amortiguado lo tenemos en los amortiguadores de un automóvil. Sin los amortiguadores, el automóvil oscilaría muchas veces después de un bache. Con ellos, las oscilaciones se amortiguan y el auto, o sólo oscila pocas veces, o no oscila nada en absoluto. Podemos comprobar el amortiguamiento de nuestro auto empujando hacia la parte delantera o trasera y soltándola. Si el automóvil vuelve al equilibrio sin oscilar, el sistema está amortiguado críticamente o sobreamortiguado. Corrientemente, observaremos una o dos oscilaciones, lo que indicaría que el amortiguamiento está un poco por debajo del crítico. Si queremos un sistema que hayamos perturbado vuelva rápidamente al equilibrio con pocas oscilaciones o sin oscilación, convendrá que su amortiguamiento sea próximo al crítico.

Caso III. $\lambda^2 - w^2 < 0$. En este caso se dice que el sistema está **subamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces m_1 y m_2 ahora son complejas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}i, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w^2}i.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2) es:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{w^2 - \lambda^2}t + c_2 \sin\sqrt{w^2 - \lambda^2}t\right). \qquad (6)$$



Tal como lo indican la figura 1, el movimiento descrito por (6) es oscilatorio, pero debido al coeficiente $e^{-\lambda t}$, las amplitudes de vibración $\to 0$ cuando $t \to \infty$.

Figura 1. Movimiento de un Sistema Subamortiguado.
Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales. 2008.

Ejemplo 1 - Sobreamortiguado

Es fácil verificar que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$$

Es

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}. \qquad (7)$$

El problema se puede interpretar como la representación del movimiento sobreamortiguado de una masa en un resorte. La masa parte de una posición localizada 1 unidad *por debajo* de la posición de equilibrio con una velocidad *descendente* de 1 ft/s.

Para graficar $x(t)$ encontramos el valor de t para el cual la función tiene un punto extremo, es decir, el valor del tiempo al cual la primera derivada (velocidad) es cero.

Al diferenciar (7) se tiene $x'^{(t)} = -\frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-4t}$, de manera que $x'(t) = 0$ implica $e^{3t} = \frac{8}{5}$ o $t = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} = 0.157$. Del examen de la primera derivada, así como de nuestra intuición física, se deduce que $x(0.157) = 1.069\,ft$ es en realidad un máximo. En otras palabras, la masa logra un desplazamiento extremo de $1.069\,pies$ por debajo de la posición de equilibrio.

Ejemplo 2 - Críticamente amortiguado

Un peso de 8 libras estira un resorte 2 pies. Asumiendo que una fuerza amortiguadora numéricamente igual al doble de la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, determinar la ecuación de movimiento si el peso se libera desde la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 3 pies/s.

De la ley de Hooke, vemos que $8 = k(2)$ da $k = 4\,lb$ y $W = mg$ da $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ slug. Por lo tanto, la ecuación diferencial del movimiento es:

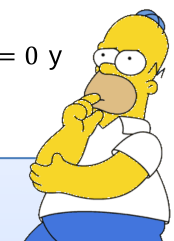
$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \qquad o \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0. \qquad (8)$$

La ecuación auxiliar para (8) es $m^2 + 8m + 16 = (m+4)^2 = 0$, de manera que $m_1 = m_2 = -4$. Entonces el sistema está críticamente amortiguado y

$$x(t) = c_1e^{-4t} - c_2te^{-4t}. \qquad (9)$$

Si se aplican las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = -3$, encontramos a su vez que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = -3te^{-4t}. \qquad (10)$$



Ejemplo 3 - Subamortiguado

Un peso de 16 libras se adhiere a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrio, el resorte mide 8.2 pies. Si el peso se impulsa y se libera del reposo en un punto situado a 2 pies sobre la posición de equilibrio, encontrar los desplazamientos $x(t)$ sabiendo además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.

La elongación del resorte después de agregarle el peso es de $8.2 – 5 = 3.2$ pies, así que por la ley de Hooke deducimos que $16 = k(3.2)$ o $k = 5$ lb/ft. Además, $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug, en consecuencia la ecuación diferencial está dada por:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \qquad o \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \qquad (11)$$

Al proceder, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo cual implica un sistema subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t).$$

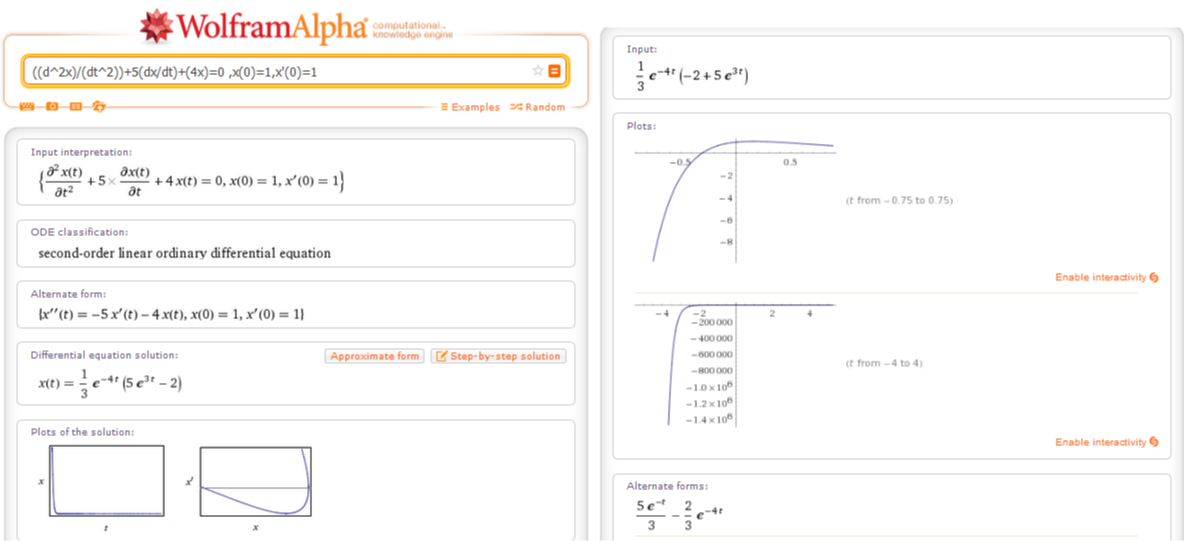
Por último, las condiciones iniciales $x(0) = -2$ y $x'(0) = 0$ producen $c_1 = -2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$, entonces la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\sin 3t\right).$$

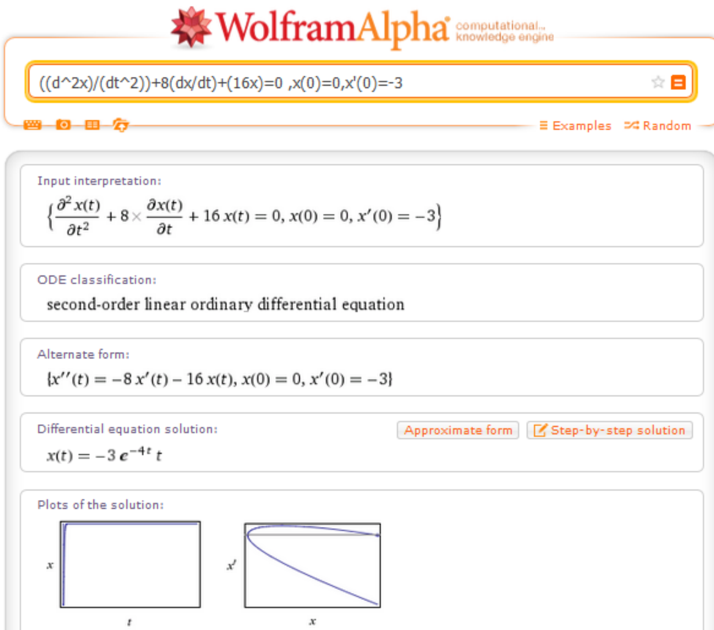
Validación

Ahora nos dirigimos a nuestro navegador de internet e introducimos el enlace de la página de Wolfram Alpha, o simplemente lo buscamos en Google, posteriormente introducimos en la casilla de entrada la ecuación del ejemplo 1 y luego oprimimos la tecla “Enter”. Se hace el mismo procedimiento para el ejemplo 2.

En el caso del ejemplo 1, revisamos el recuadro de interpretación de las entradas de Wolfram y revisamos que las condiciones iniciales estén correctas. Luego revisamos la clasificación de la ecuación diferencial y podemos ver que es una ecuación de segundo orden lineal, que es el tema que estamos trabajando: “Modelos Lineales de Orden Superior”. Posteriormente, vemos la forma alternativa donde se utiliza una notación diferente para representar la ecuación un poco más compacta, y luego nos encontramos el recuadro de la respuesta, sin embargo, con un primer vistazo parece que las respuestas no coinciden debido a que el software presenta la respuesta diferente. Para salir de dudas basta con hacer clic sobre la respuesta y Wolfram inmediatamente toma esa ecuación como una entrada; luego nos dirigimos a las formas alternativas de presentar la ecuación y encontramos allí la respuesta que coincide con la obtenida líneas arriba en el ejemplo 1, tal como se muestra en la figura:



Luego de realizar el mismo procedimiento para el ejemplo 2, vemos en este caso una respuesta clara que coincide con la respuesta obtenida, además de arrojar 2 gráficas: una del comportamiento de la función y la otra de su derivada como es común del software.



Ejercicios Propuestos

Utilice el método que se analizó en la guía para resolver:

1. Una masa que pesa 4 libras está unida a un resorte cuya constante es 2 lb/ft. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. La masa inicialmente se libera desde un punto localizado un (1) pie por encima de la posición de equilibrio a velocidad descendente de 8 ft/s. Determine el tiempo al cual la masa cruza la posición de equilibrio. Encuentre el momento en el que la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

2. Un resorte de 4 pies mide 8 pies de largo después de unirlo a una masa con peso de 8 libras. El medio a través del cual se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\sqrt{2}$ veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con velocidad descendente de 5 ft/s. Encuentre el momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

3. Una masa con peso de 10 libras estira un resorte 2 pies. La masa se sujeta a un dispositivo de amortiguamiento de velocidad que ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente igual a $\beta(\beta > 0)$ veces la velocidad instantánea. Determine los valores de la constante de amortiguamiento β de manera que el movimiento posterior sea *a*) sobreamortiguado, *b*) críticamente amortiguado y *c*) subamortiguado.

No olvide validar sus respuestas con Wolfram Alpha.

Para mayor información de este tema pueden ver el siguiente video a modo de ejemplo:
http://www.youtube.com/watch?v=OxdY_wZB4n8

Referencias:

- Edwards, Charles Henry, and David E. Penney. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación, 2009.
- Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Matemáticas avanzadas para ingeniería I: ecuaciones diferenciales*. 2008.
- Tipler, Paul A. Física preuniversitaria. Vol. 1. Editorial Reverte, 1992.
- Uso del Software Libre ***Wolfram|Alpha*****: Computational Knowledge Engine**