

CONTINUIDAD

Una función se considera continua cuando cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Para comprobar la continuidad hacemos los límites laterales y la función en el punto.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 5) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 3 - 2 = 1$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$$

Como el límite por la derecha es igual al límite por la izquierda e igual a la función en el punto, consideramos que la función es **continua** en el punto $x=3$.

Hay dos tipos fundamentales de discontinuidad:

- No evitable:
 - De salto finito: Cuando los límites laterales son distintos pero tienen un valor real.
 - De salto infinito: Cuando los límites laterales son distintos, pero al menos uno de ellos toma un valor $+\infty$ o $-\infty$

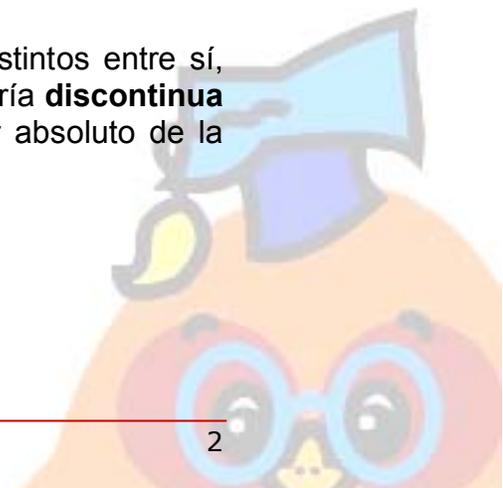
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$\text{Salto } |5 - 4| = 1$$

Como se puede ver los límites laterales son distintos entre sí, pero son números reales con lo cual la función sería **discontinua de salto finito**. En donde el salto sería el valor absoluto de la diferencia de los límites



$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x+1}{2x-6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x + 2) = 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{2x-6} = \frac{3+1}{2 \cdot 3 - 6} = \frac{4}{0} = +\infty$$

Como se puede ver los límites laterales son distintos entre sí, pero uno de los valores no es un número real, con lo cual la función sería **discontinua de salto infinito**.

- Evitable

- De primera especie: Cuando los límites por la derecha y la izquierda son iguales pero distintos de la función en el punto.
- De segunda especie: Cuando los límites son una indeterminación y al eliminarla se consigue que tome un valor.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

En este caso los límites laterales son iguales pero distintos de la función en el punto, con lo cual la función sería **discontinua evitable de primera especie**.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 3x - 2 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-2) = -2 - 2 = -4$$

